1 CUK-H03278-17-P014728 510.5-.002

AMERICAN

Journal of Mathematics

17

EDITED BY THOMAS CRAIG

WITH THE CO-OPERATION OF SIMON NEWCOMB

PUBLISHED UNDER THE AUSPICES OF THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων

UNIVERSITY OF CALCUTTA LIBRARY THE ADVANCEMENT OF LEARNING

VOLUME XVIII

BALTIMORE: THE JOHNS HOPKINS PRESS

LEMCKE & BUECHNER, *New York*
G. E. STECHERT, *New York*
D. VAN NOSTRAND CO., *New York*
E. STEIGER & CO., *New York*
KEGAN PAUL, TRENCH, TRÜBNER & CO., *London*
GAUTHIER-VILLARS, *Paris*
A. HERMANN, *Paris*
MAYER & MÜLLER, *Berlin*
KARL J. TRÜBNER, *Strassburg*
ULRICO HOEPLI, *Milan*

1896

P14726

PRESS OF THE FRIEDENWALD CO.,
BALTIMORE, MD.

UNIVERSITY OF CALCUTTA
LIBRARY.
THE ADVANCEMENT OF LE

INDEX.

PAGE

BAKER, ARTHUR LATHAM. Algebraic Symbols, ... 62

CAJORI, FLORIAN. On the Multiplication and Involution of Semi-convergent Series, . 195

CARTAN, E. Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu, ... 1

CHESSIN, A. S. On a Point of the Theory of Functions, ... 98
On Non-uniform Convergence of Infinite Series, ... 128

COWELL, P. H. On the Inclinational Terms in the Moon's Coordinates, ... 99

DICKSON, LEONARD E. Analytic Functions Suitable to Represent Substitutions, . 210

GOURSAT, E. Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace, ... 347

KANTOR, S. Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen, ... 219

KUMMELL, CHAS. H. To Express the Roots of the Solvable Quantics as Symmetrical Functions of Homologues, ... 74

MASCHKE, H. The Representation of Finite Groups, especially of the Rotation Groups of the Regular Bodies of Three- and Four-Dimensional Space, by Cayley's Color-Diagrams, ... 156

MOORE, ELIAKIM HASTINGS. Tactical Memoranda I–III, ... 264

PAGE, J. M. Note on Singular Solutions, ... 95

PEIRCE, B. O. On a Certain Class of Equipotential Surfaces, ... 130

PETROVITCH, M. MICHEL. Remarques sur les équations de Dynamique et sur le mouvement tautochrone, ... 135

PIERPONT, JAMES. Note on C. S. Peirce's Paper on "A Quincuncial Projection of the Sphere," 145
On the Invariance of the Factors of Composition of a Substitution-group, ... 153

SAUSSURE, RENÉ DE. Etude de Géométrie Cinématique réglée, ... 304

UNIVERSITY OF CALCUTTA
LIBRARY.
THE ADVANCEMENT OF LEARNING.

Rene Appell

THE F. GUTEKUNST CO., PHILA.

Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu.

PAR E. CARTAN, *à Montpellier.*

Etant donnée une équation algébrique, il peut arriver dans certains cas que, par des considérations géométriques ou autres, on connaisse d'avance certaines relations entre les racines de cette équation, par exemple dans le cas de l'équation qui donne les neuf points d'inflexions d'une courbe plane du troisième degré. On peut alors profiter de ces relations pour ramener la résolution à celle d'équations auxiliaires plus simples; la nature, le nombre, l'ordre de ces équations dépendent uniquement de la *structure* d'un certain groupe de substitutions effectuées sur les racines. Un fait analogue se présente dans les équations aux dérivées partielles. M. Lie, en particulier, a montré comment, étant donné un système d'équations aux dérivées partielles *dont la solution générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes arbitraires*, on pouvait ramener ce système à d'autres systèmes auxiliaires plus simples, si l'on connaît soit un moyen de passer d'une solution particulière à une autre solution plus générale au moyen de transformations effectuées sur les variables et les fonctions. Sa méthode d'intégration de ces systèmes ou plutôt des systèmes complets qui admettent un groupe de transformations fini et continu repose aussi essentiellement sur la *structure* du groupe considéré, et c'est cette structure qui détermine la nature des intégrations auxiliaires auxquelles se ramène l'intégration du système donné. Mais pour appliquer la méthode, il est nécessaire de ramener préalablement la structure du groupe à une forme particulière; il faut d'abord *décomposer le groupe en une série normale de sous-groupes, ensuite ramener la structure de chaque groupe composant à une forme canonique.* La solution du premier problème décompose le système donné en un certain nombre d'autres réductibles; la solution du second problème permet de traiter chacun de ces systèmes auxiliaires ou du moins de le

ramener à un système *canonique* qui rentre dans un certain nombre de *types* connus à l'avance.

Ces deux problèmes sont de nature purement algébrique; mais leur résolution ne semblait pas facile avant les recherches de M. Killing sur la structure des groupes. Mais grâce à ses travaux et aux miens sur le même sujet, je suis parvenu, comme je l'ai annoncé dans les Comptes Rendus au mois d'octobre 1894, à résoudre complètement ces deux problèmes. C'est cette résolution que je me propose d'exposer dans ce travail.

Les résultats les plus importants auxquels j'arrive sont les suivants. D'abord on peut toujours par des opérations *rationnelles* ramener le problème au cas où le groupe est *semi-simple*, et même reconnaître d'avance la *nature* des sous-groupes invariants simples qui *composent* le groupe. Leur séparation n'exige la résolution d'une équation que si plusieurs de ces sous-groupes ont la même structure. Quant à la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe simple, elle dépend d'une certaine équation algébrique dont le *groupe* de substitutions, au sens de Galois, est connu; cette équation s'appelle l'*équation caractéristique* du groupe. Les différents groupes de substitutions qui s'introduisent ainsi ne présentent rien d'interessant et se relient immédiatement aux groupes symétriques de n lettres. Néammoins trois d'entre eux offrent un intérêt particulier et sont isomorphes, l'un avec *le groupe des* 27 *droites d'une surface du* 3e *ordre*, l'autre avec *le groupe des* 28 *tangentes doubles d'une courbe du* 4e *ordre*, le dernier avec *le* 7e *groupe hypoabélien de* 120 *lettres*. Ce n'est pas un des résultats les moins intéressants et les moins inattendus de cette étude, que d'établir une relation entre ces groupes de substitutions de Galois et les groupes de transformations de M. Lie.

Je commence par exposer aussi rapidement que possible la méthode d'intégration de M. Lie, puis, après avoir rappelé quelques résultats essentiels sur la structure des groupes, je m'occupe du problème de la décomposition d'un groupe en une série normale de sous-groupes, et ensuite de la réduction de la structure d'un groupe simple à sa forme canonique. Le problème de trouver un sous-groupe maximum de chaque groupe simple donné est alors notablement simplifié et je me propose de le traiter dans un autre travail de façon à établir tous les types de systèmes d'équations différentielles auxquels la méthode de M. Lie permettra de ramener un système d'équations aux dérivées partielles jouissant des propriétés énoncées tout à l'heure. La connaissance de tous les groupes simples linéaires et homogènes à nombre minimum de variables, groupes qui sont tous

mentionnés dans ma thèse, permettra ensuite de ramener ces systèmes d'équations différentielles à des systèmes linéaires aussi simples que possible.

Il est d'ailleurs bien évident que toutes ces recherches trouvent leur application, non seulement dans la méthode d'intégration dont j'ai déjà parlé, mais encore dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui admettent un système fondamental d'intégrales, théorie dominée aussi par la structure des groupes et qui a d'ailleurs un rapport très étroit avec la méthode de M. Lie dont elle est, en un certain sens, le prolongement.

§1.

Méthode de M. Lie pour intégrer les systèmes complets qui admettent un groupe de transformations.

On sait que l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles dont la solution générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes arbitraires se ramène toujours à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires ou encore à celle d'un système complet; il suffit pour cela d'adjoindre aux fonctions primitives un nombre suffisant de leurs dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes.* Il se peut qu'en effectuant sur les variables et les fonctions une certaine transformation connue, une solution quelconque du système se change en une autre solution du même système, d'une manière plus générale on peut connaître une infinité de transformations, dépendant par exemple de r paramètres arbitraires, et jouissant de la même propriété; on peut, sans restreindre la généralité, supposer que ces transformations forment un groupe; on dit alors que la système considéré *admet* le groupe de transformations en question. C'est ainsi que le système d'équations aux dérivées partielles qui donne les surfaces dont tous les points sont des ombilics, admet le groupe des déplacements dans l'espace. C'est à ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, ou plutôt aux systèmes complets qui admettent un groupe de transformations fini que s'applique la méthode d'intégration que M. Lie a exposée dans le tome XXV des Mathematische Annalen, et que je vais rapidement résumer.

Soit un système complet formé de p équations à n variables,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 f = \xi_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{12}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_p f = \xi \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{p2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{pn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

* V. en particulier Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, I, ch. 10.

Dire que ce système complet admet le groupe de transformations défini par les équations

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

c'est dire que si $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une intégrale quelconque du système (1), l'expression $\omega(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, où l'on a remplacé les x' au moyen des formules (2), est, quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$, une intégrale du système (1). On sait qu'on peut encore définir le groupe (2) par r transformations infinitésimales indépendantes représentées par les symboles

$$A_i f = \alpha_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

si par exemple, ce que je suppose implicitement, pour certaines valeurs $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_r^0$ des paramètres, les équations (2) se réduisent à

$$x_i' = x_i,$$

et si je donne à a_1 la valeur $a_1^0 + \delta t$, et à $a_2, \ldots, a_r$ les valeurs $a_2^0, \ldots, a_r^0$, la partie principale de l'accroissement d'une fonction quelconque f sera de la forme

$$\left(\alpha_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\delta t,$$

et c'est le coefficient de δt dans cette partie principale que j'appelle $A_1 f$, et qui caractérise la transformation infinitésimale correspondant aux paramètres $a_1^0 + \delta t, a_2^0, \ldots, a_r^0$.

Les r symboles $A_1 f, \ldots, A_r f$ sont linéairement *indépendants*, c'est-à-dire ne sont liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients *constants*, et de plus ils satisfont à des identités de la forme

$$(A_i A_k) = A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} A_s f, \tag{4}$$

où les c_{iks} sont des constantes.

Le fait que le système complet (1) admet le groupe (2) s'exprime, au moyen des transformations infinitésimales (3), par des relations de la forme

$$(A_i X_k) = \lambda_{ik1} X_1 f + \ldots + \lambda_{ikp} X_p f, \tag{5}$$

où les λ sont des fonctions convenablement choisies de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet, d'abord s'il en est ainsi et si ω désigne une intégrale quelconque du système (1), on a

$$A_i(X_k\omega) - X_k(A_i\omega) = 0,$$

ce qui montre que $A_i(\omega)$ est une nouvelle intégrale et par suite aussi $A_i(\omega)\,\delta t$; autrement dit le système admet toutes les transformations infinitésimales du groupe (2), et par suite aussi ses transformations finies. Réciproquement si le système (1) admet le groupe (2), il admettra la transformation infinitésimale $A_1 f$, c'est-à-dire que $A_1(\omega)$ sera une intégrale de (1), autrement dit l'équation

$$A_1(X_i f) - X_i(A_1 f) = 0$$

admettra toutes les intégrales du système (1), ce qui entraîne des égalités de la forme (5).

Cela étant supposons qu'il existe h relations linéaires et h seulement, de la forme

$$\Sigma \mu_i X_i f + \Sigma \lambda_k A_k f = 0;$$

on peut toujours les résoudre par rapport à h des quantités Af, puisque les $X_i f$ sont linéairement indépendants. Si on a par exemple

$$A_i f = \lambda_{i,\,h+1} A_{h+1} f + \ldots + \lambda_{i,\,r} A_r f + \Sigma \mu_{i,\,k} X_k f \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, h), \qquad (6)$$

tous les coefficients λ_{ik} sont des intégrales du système complet, comme cela résulte immédiatement des équations (5) et de l'impossibilité d'une relation linéaire entre $A_{h+1} f, \ldots, X_p f$. En effectuant sur ces intégrales les transformations infinitésimales (3), on peut en obtenir de nouvelles et ainsi de suite. Supposons que par ce procédé on en ait obtenu ν indépendantes: on peut toujours, par un changement de variables, faire en sorte que ces ν intégrales soient $x_{n-\nu+1}, x_{n-\nu+2}, \ldots, x_n$.

Le système complet (1) prendra alors la forme

$$X_i f = \xi_{i1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{i,\,n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}} \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots\, p)$$

où les ξ pourront contenir $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$. Quant aux transformations infinitésimales (3) elles prendront la forme

$$A_i f = \alpha_{i1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_{i,\,n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}} + \alpha_{i,\,n-\nu+1}(x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu+1}} + \ldots$$

Nous pouvons maintenant regarder $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$ comme des constantes. Alors le système complet est à $n - \nu = n'$ variables et en faisant des combinaisons convenables,

$$\gamma_1(x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n) A_1 f + \ldots + \gamma_r(x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n) A_r f,$$

nous aurons un certain nombre r' de transformations infinitésimales ne contenant plus $\frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Ces transformations engendrent un groupe en $x_1, \ldots, x_{n-\nu}$ dont il est facile de trouver les équations finies. Si on remarque en effet que le groupe (2) échange entre elles les variables $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$, il suffit d'écrire que la transformation (2) ne change aucune des quantités $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$, ce qui donne certaines relations

$$x_{n-\nu+i} = f_{n-\nu+1}(x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

qui permettent d'exprimer un certain nombre $r-r'$ des paramètres en fonction des r' autres et des *constantes* $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$. On a alors en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\nu}$ le groupe cherché.

Finalement, en effaçant les accents de n' et de r' et en faisant abstraction des constantes $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$, nous sommes ramenés au problème primitif; seulement ici les relations telles que (6) qui peuvent exister ne donnent naturellement plus d'intégrale nouvelle; autrement dit les $\lambda_{i,k}$ sont des constantes. Comme on peut remplacer les r transformations infinitésimales $A_i f$ par r combinaisons linéaires indépendantes de ces mêmes quantités, on peut supposer que les h relations (6) se réduisent à

$$A_i f = \Sigma \mu_{ik} X_k f \qquad (i = 1, 2, \ldots, h), \tag{6'}$$

et il n'existe alors aucune relation linéaire entre $A_{h+1} f, \ldots, X_p f$. Autrement dit il existe des transformations infinitésimales du groupe qui sont des combinaisons linéaires (à coefficients quelconques) des premiers membres des équations du système complet, et ces transformations se déduisent toutes linéairement de $A_1 f, \ldots, A_h f$. Il en résulte, d'après (4) et (5) que tous les crochets $(A_1 A_i)$, $(A_2 A_i), \ldots, (A_h A_i)$, où $A_i f$ est une quelconque des transformations infinitésimales du groupe (2), sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de $A_1 f, \ldots, A_h f$; on dit que $A_1 f, \ldots, A_h f$ engendrent un *sous-groupe invariant* du groupe (2). Supposons qu'on connaisse les équations finies de ce sous-groupe, ce qui, comme nous le verrons, est toujours possible. Alors, on pourra par des éliminations trouver ses *invariants*, autrement dit les intégrales du système complet

$$A_1 f = 0, \ldots, A_h f = 0. \tag{7}$$

Supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$ soient ces invariants. Comme le système (1) comprend le système (7), les intégrales de (1) ne pourront être que des fonctions

de $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$, et par suite dans les équations $X_i f = 0$, on pourra ne garder que les termes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n'}}$ et dans les coefficients de ces termes, y donner à $x_{n+1}, \ldots, x_n$ des valeurs constantes. Le système se réduira alors à p' équations (si, parmi les quantités $\Sigma \mu_{ik} X_k f$, il y en a $p - p'$ indépendantes) qui formeront encore un système complet. De plus le groupe (2), qu'admet le système complet (7), échangera entre elles les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$ et deviendra, en faisant abstraction des autres variables, un groupe à $r - h = r'$ paramètres. On aura donc finalement, en effaçant les accents de n', r', p', un système complet de p équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, admettant un groupe d'ordre r, engendré par les transformations infinitésimales $A_1 f, \ldots, A_r f$, en dont on connaît les équations finies.

On est ramené au problème primitif; seulement ici les expressions $X_1 f, \ldots, X_p f, A_1 f, \ldots, A_r f$ ne sont liées par aucune relation linéaire (à coefficients quelconques). Il en résulte que $p + r$ est au plus égal à n. Si $p + r$ est inférieur à n, en intégrant le système complet

$$X_1 f = 0, \ldots, X_p f = 0; \; A_1 f = 0, \ldots, A_r f = 0$$

et en prenant pour variables $n - p - r$ intégrales distinctes de ce système et $p + r$ autres fonctions quelconques distinctes entre elles et distinctes des précédentes, on se ramène au cas de $p + r$ variables, car on peut dès lors regarder les $n - p - r$ intégrales considérées comme des constantes.

Finalement on a à intégrer un système complet (1) de p équations a $n = p + r$ variables, admettant un groupe d'ordre r dont on connaît les équations finies (2) et les transformations infinitésimales (3), les $p + r$ expressions $X_1 f, \ldots, X_p f$; $A_1 f, \ldots, A_r f$ étant de plus linéairement indépendantes. On peut encore simplifier le problème en introduisant comme nouvelles variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ le système de p intégrales indépendantes du système complet

$$A_1 f = 0, \ldots, A_r f = 0,$$

ou encore un système de p invariants indépendants du groupe (2), invariants qu'on peut calculer par des éliminations, et en prenant en outre r fonctions indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, soit $z_1, z_2, \ldots, z_r$ pour former avec $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les $p + r$ nouvelles variables. Enfin on pourra résoudre les équations

$$X_1 f = 0, \ldots, X_p f = 0,$$

par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ et supposer par exemple

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \zeta_{i1} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \zeta_{ir} \frac{\partial f}{\partial z_r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec
$$A_i f = \beta_{i1} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \beta_{i2} \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + \beta_{ir} \frac{\partial f}{\partial z_r} \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Le système complet (1) devient alors un système *jacobien* et l'on a des relations de la forme

$$\left.\begin{aligned} &(X_i X_k) = 0, \quad (A_i X_k) = 0, \\ &(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} A_s f \qquad . \end{aligned}\right\}$$

La méthode d'intégration de Mayer permet encore de ramener au cas de $p = 1$; il suffit, en supposant que les coefficients ζ_{ik} soient holomorphes au voisinage de $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$, de poser

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \; x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \ldots, x_p = x_p^0 + y_1 y_p,$$

de résoudre l'équation obtenue en résolvant par rapport à $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, en y regardant $y_2, \ldots, y_p$ comme des constantes.* Par ce changement de variables le groupe (2) se change en un groupe en $z_1, z_2, \ldots, z_r$, mais dans les équations duquel $y_2, y_3, \ldots, y_p$ devront être regardées comme des constantes. On est donc bien ramené au cas où $p = 1$.

Le problème réduit est donc le suivant. *Intégrer l'équation*

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \zeta_r \frac{\partial f}{\partial z_r} 0, \tag{8}$$

sachant que cette équation admet un groupe G à r paramètres connu, dont les transformations infinitésimales

$$A_i f = \beta_{i1} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \beta_{i2} \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + \beta_{ir} \frac{\partial f}{\partial z_r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

ne sont liées par aucune relation linéaire (*à coefficients quelconques*). Un tel groupe est dit *simplement transitif*†; il existe dans le groupe une transformation et une

* Voir par exemple Goursat, *Leçons sur l'Intégration des Equations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 54–60.

† V. Lie, *Transformationsgruppen*, I, p. 212.

seule permettant de passer d'un point quelconque $(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ à un autre point quelconque $(z_1', z_2', \ldots, z_r')$.

La nature des opérations à effectuer pour arriver à la solution de ce problème réduit dépend essentiellement de la *structure* du groupe G, c'est-à-dire des constantes $c_{ik\varrho}$. Supposons d'abord qu'on puisse choisir les transformations infinitésimales $A_1 f, \ldots, A_r f$ de façon que

$$(A_i A_k) = c_{ik1} A_1 f + \ldots + c_{i,k,r-1} A_{r-1} f, \quad (i=1, 2, \ldots, r-1;\ k=1, 2, \ldots, r) \quad (10)$$

autrement dit que le groupe admette un sous-groupe invariant $G_1(A_1 f, \ldots, A_{r-1} f)$ d'ordre $r-1$ (ou à $r-1$ paramètres). Alors le système complet

$$Xf = 0,\ A_1 f = 0, \ldots, A_{r-1} f = 0,$$

admet la transformation infinitésimale $A_r f$. Si donc ω est une intégrale de ce système complet, $A_r(\omega)$ est une fonction de ω, puisque le système complet est de r équations à $r+1$ variables. En posant

$$u = \int \frac{d\omega}{A_r(\omega)}$$

on a alors $A_r(u) = A_r(\omega) \dfrac{du}{d\omega} = 1$. Il existe donc une fonction u satisfaisant aux équations

$$Xf = 0,\ A_1 f = 0, \ldots, A_{r-1} f = 0,\ A_r f = 1;$$

ces équations peuvent être résolues par rapport à $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial z_r}$ et par suite donnent ω par une *quadrature*. En faisant un changement de variables, on peut faire en sorte que cette intégrale soit z_r; on peut alors regarder z_r comme un paramètre, et en laissant de côté la transformation infinitésimale $A_r f$, on est ramené du cas de r au cas de $r-1$. Le groupe G est ici remplacé par le groupe G_1.

Si le groupe G_1 admet à son tour un sous-groupe invariant d'ordre $r-2$, on peut par une quadrature trouver une nouvelle intégrale et ainsi de suite. Donc *si le groupe G admet un sous-groupe invariant d'ordre $r-1$, celui-ci un sous-groupe invariant d'ordre $r-2$, ce dernier un sous-groupe invariant d'ordre $r-3$, et ainsi de suite, on peut intégrer complètement l'équation proposée par r quadratures.* C'est pour cette raison que M. Lie a nommé *intégrables* les groupes qui jouissent des propriétés qui viennent d'être énoncées.

Dans le cas général où le groupe G n'est pas intégrable, voici comment on peut procéder. Imaginons que les transformations infinitésimales $A_{h+1}f, \ldots, A_r f$ engendrent un sous-groupe invariant G_1 du groupe G, c'est-à-dire que tous les crochets $(A_i A_{h+1}), \ldots, (A_i A_r)$, où $A_i f$ est une transformation infinitésimale quelconque de G, dépendent linéairement de $A_{h+1}f, \ldots, A_r f$. Nous pouvons avoir les équations finies du sous-groupe invariant G_1 et par suite calculer ses invariants. Supposons que $z_1, z_2, \ldots, z_h$ soient h distincts de ces invariants (il n'y en a pas plus de h). Alors la nature des crochets $(XA_{h+1}), \ldots, (XA_r), (A_i A_{h+1}), \ldots, (A_i A_r)$ montre que dans $Xf, A_1 f, \ldots, A_h f$ les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_h}$ ne dépendent que de $x, z_1, z_2, \ldots, z_h$. Considérons alors l'équation

$$\overline{X}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \zeta_h \frac{\partial f}{\partial z_h};$$

elle admet le groupe $\overline{G}$ engendré par les transformations infinitésimales

$$\overline{A}_i f = \beta_{i1} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \beta_{i2} \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + \beta_{ih} \frac{\partial f}{\partial z_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

qui indique comment le groupe G transforme les variables $z_1, z_2, \ldots, z_h$. Supposons cette équation intégrée et prenons pour $z_1, z_2, \ldots, z_h$, h intégrales distinctes. Alors l'équation primitive se réduit à

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_{h+1} \frac{\partial f}{\partial z_{h+1}} + \ldots + \zeta_r \frac{\partial f}{\partial z_r}$$

et elle admet le groupe G_1 engendré par les transformations

$$A_{h+i} f = \beta_{h+i,\, h+1} \frac{\partial f}{\partial z_{h+1}} + \ldots + \beta_{h+i,\, r} \frac{\partial f}{\partial z_r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-h).$$

On voit que le problème se ramène à l'intégration d'une équation à $h+1$ variables admettant un groupe simplement transitif d'ordre h et à celle d'une équation à $r-h+1$ variables admettant un groupe simplement transitif d'ordre $r-h$. Si en particulier $h=1$, la première équation s'intègre par une quadrature.

Nous pouvons supposer que le sous-groupe invariant G_1 n'est contenu dans aucun sous-groupe invariant plus grand; alors le groupe $\overline{G}$ n'admet lui-même

aucun sous-groupe invariant; on dit qu'il est *simple*. Si donc nous sommes parvenus à trouver dans le groupe G une série de sous-groupes

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_q,\ 1,$$

telle que chaque groupe G_i de cette série soit un sous-groupe invariant du précédent G_{i-1} et ne soit contenu dans aucun sous-groupe invariant plus grand de G_{i-1}, nous aurons ramené l'intégration de l'équation primitive à celle d'une série d'équations *à groupes simples*. L'établissement d'une telle série constitue ce que M. Lie a appelé une *décomposition normale du groupe G en une série de sous-groupes*. On peut démontrer que, de quelque façon qu'on opère, les nombres des paramètres des groupes simples qu'on en déduit restent les mêmes à l'ordre près.

Prenons donc une équation à $r+1$ variables $x, z_1, z_2, \ldots, z_r$, $(r>1)$, admettant un groupe G *simple, simplement transitif* en $z_1, z_2, \ldots, z_r$ (les équations du groupe pouvant d'ailleurs dépendre de la variable x). Supposons que les transformations infinitésimales $A_{q+1}f, \ldots, A_rf$ définissent un sous-groupe g de G, c'est-à-dire que les crochets $(A_{q+i}A_{q+k})$ ne dépendent que de $A_{q+1}f, \ldots, A_rf$. Si nous connaisons les équations *finies* de ce sous-groupe, nous pourront en calculer les invariants et par un changement de variables faire en sorte que $z_1, z_2, \ldots, z_q$ soint q de ces invariants, tous les autres étant des fonctions de $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Alors les relations

$$(XA_{q+1}) = \ldots = (XA_r) = 0$$

montrent que dans Xf les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_q}$ ne dépendent que de $x, z_1, z_2, \ldots, z_q$:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_1(x, z_1, \ldots, z_q)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \zeta_{q+1}(x, z_1, \ldots, z_r)\frac{\partial f}{\partial z_{q+1}} + \ldots$$

Imaginons qu'on ait intégré l'équation obtenue en supprimant les termes en $\frac{\partial f}{\partial z_{q+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_r}$; c'est dire qu'on ait déterminé q fonctions convenables de $x, z_1, z_2, \ldots, z_q$, qui soient intégrales de l'équation réduite. En prenant ces fonctions pour nouvelles variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$ l'équation primitive se réduit alors à

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_{q+1}\frac{\partial f}{\partial z_{q+1}} + \ldots + \zeta_r\frac{\partial f}{\partial z_r},$$

les transformations infinitésimales A_if conservant la même forme. Je dis que

la connaissance des q intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_q$ intégre complètement l'équation. En effet les expressions $A_i(z_1), \ldots, A_i(z_q)$ sont d'après l'hypothèse même des intégrales. Si ces quantités ne dépendaient que de $z_1, z_2, \ldots, z_q$, les crochets $(A_i A_{q+1}), \ldots, (A_i A_r)$ ne dépendraient que de $A_{q+1}f, \ldots, A_r f$ et le sous-groupe g serait invariant, ce qui n'est pas. Supposons donc que les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_q, A_i(z_1), \ldots, A_i(z_q)$ s'expriment en fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_{q+\alpha}$ et ne puissent pas s'exprimer en fonction d'un moindre nombre de variables. Alors il existe $r-(q+\alpha)$ combinaisons linéairement indépendantes de la forme

$$\lambda_{q+1} A_{q+1} f + \ldots + \lambda_r A_r f,$$

où les λ sont des fonctions de $x, z_1, \ldots, z_r$, et ne contenant pas de termes en $\frac{\partial f}{\partial z_{q+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{q+\alpha}}$. On trouvera toutes ces combinaisons en écrivant que les crochets $(\lambda_{q+1} A_{q+1} + \ldots + \lambda_r A_r, A_i)$ ne dépendent que de $A_{q+1}f, \ldots, A_r f$. On obtient ainsi un certain nombre d'équations linéaires et homogènes à coefficients *constants* en $\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_r$; on peut toujours supposer que ces équations se réduisent à

$$\lambda_{q+1} = 0, \ldots, \lambda_{q+\alpha} = 0.$$

On arrive ainsi à un sous-groupe $(A_{q+\alpha+1}f, \ldots, A_r f)$ admettant les invariants $z_1, z_2, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{q+\alpha}$. En formant les expressions $A_i(z_1), \ldots, A_i(z_{q+\alpha})$, on voit comme tout à l'heure qu'on doit trouver au moins une intégrale nouvelle, sans quoi le sous-groupe $(A_{q+\alpha+1}f, \ldots, A_r f)$ serait invariant, et ainsi de suite. On trouve donc, en répétant l'opération un nombre suffisant de fois, toutes les intégrales de l'équation primitive.

Tout revient donc à intégrer l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \xi_q \frac{\partial f}{\partial z_q} = 0, \tag{11}$$

à $q+1$ variables $x, z_1, \ldots, z_q$. On voit que le nombre des variables dépend de l'ordre du sous-groupe g et sera d'autant plus petit que le sous-groupe g aura plus de paramètres.

Il est bien remarquable que la connaissance du groupe G permet de ramener l'équation (11), suivant les cas, à un certain nombre de formes *canoniques* connues à l'avance, ces formes canoniques dépendant uniquement de la *structure* du groupe G. On peut arriver à ce résultat en considérant, avec M. Lie, le groupe

simplement transitif *réciproque* du groupe G.* Si on prend pour paramètres d'une transformation du groupe G le point $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ que cette transformation fait succéder à un point fixe $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_r^0)$, et si les équations du groupe G sont

$$z_i' = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_r; a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{12}$$

celles du groupe réciproque G' sont

$$z_i' = f_i(b_1, b_2, \ldots b_r; z_1, z_2, \ldots, z_r), \tag{13}$$

où les b sont les paramètres arbitraires. Le groupe G' est formé des transformations qui laissent invariant le groupe G; ces deux groupes sont *isomorphes*, c'est-à-dire qu'on peut établir une correspondance entre les transformations de ces deux groupes de telle sorte qu'au produit de deux transformations du premier groupe corresponde le produit des deux transformations correspondantes du second groupe; on peut obtenir une correspondance de cette nature en donnant à $b_1, b_2, \ldots, b_r$ les valeurs qui, mises dans (12) à la place de $a_1, a_2, \ldots, a_r$, donnent la transformation *inverse* de la transformation (12), c'est-à dire en éliminant les z et les z' entre

$$\begin{cases} z_i' = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n; a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ z_i = f_i(z_1', z_2', \ldots, z_n'; b_1, b_2, \ldots, b_r). \end{cases}$$

Il résulte de là qu'à toute transformation infinitésimale $A_i f$ de G on peut faire correspondre une transformation infinitésimale $B_i f$ de G' de telle façon qu'on ait en même temps

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} A_s f,$$

$$(B_i B_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} B_s f,$$

et de plus on a

$$(A_i B_k) = 0. \tag{14}$$

Enfin toute transformation infinitésimale Bf satisfaisant aux équations $(A_i B) = 0$ est une combinaison linéaire à coefficients constants (fonctions de x) de $B_1 f, \ldots, B_r f$.

Cela étant, si $z_1, z_2, \ldots, z_q$ sont les invariants déjà déterminés du sous-

---

*V. Lie, *Transformationsgruppen*, I, p. 378, 380, 394.

groupe $g(A_{q+1}f, \ldots, A_r f)$, les relations (14) montrent que dans les $B_i f$, les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_q}$ ne dépendent que de $x, z_1, z_2, \ldots, z_q$. Les identités de Jacobi

$$(A_i(XB_k)) = ((A_i X)B_k) - (X(A_i B_k))$$

montrent de plus que les crochets $(B_k X)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants (ou fonctions de x) de $B_1 f, \ldots, B_r f$. Il en est de même si dans Xf et $B_i f$ on supprime les termes en $\frac{\partial f}{\partial z_{q+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_r}$. Alors l'équation $Xf = 0$ devient l'équation réduite (11) et le groupe G' devient un groupe $\overline{G}'$ en $z_1, z_2, \ldots, z_q$. En regardant x comme un paramètre, les crochets (XB_i) deviennent des transformations infinitésimales en $z_1, z_2, \ldots, z_q$, combinaisons linéaires à coefficients constants des transformations réduites $\overline{B}_1 f, \ldots, \overline{B}_r f$. Or il résulte d'un théorème de la théorie des groupes* que, si le sous-groupe g n'est contenu dans aucun sous-groupe plus grand de G, toute transformation infinitésimale

$$Yf = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \eta_q \frac{\partial f}{\partial z_q}$$

qui laisse invariant le groupe simple $(\overline{B}_1 f, \ldots, \overline{B}_r f)$, c'est-à-dire telle que les $(Y\overline{B}_i)$ s'expriment linéairement au moyen des $\overline{B}_i f$, est elle-même une combinaison linéaire à coefficients *constants* de $\overline{B}_1 f, \ldots, \overline{B}_r f$. Comme ici x est regardé provisoirement comme un paramètre, nous aurons

$$\overline{X}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_1 \overline{B}_1 f + \xi_2 \overline{B}_2 f + \ldots + \xi_r \overline{B}_r f, \tag{15}$$

les ξ étant des fonctions de x seulement.

Le considérations précédentes pourront s'appliquer si nous connaissons pour chaque groupe simple un sous-groupe *maximum*. Il y a plus. Remarquons que le sous-groupe g de G est caractérisé par les valeurs $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_q^0$ données aux paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$ dans les équations (12), que les transformations correspondantes de G' s'obtiennent également en donnant aux paramètres $b_1, b_2, \ldots, b_q$ les valeurs $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_q^0$ et que ces valeurs font succéder dans le groupe réduit $\overline{G}'$ au point $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_q^0)$ le même point. Le sous-groupe de

* V. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations*, p. 113.

$\overline{G}$ qui laisse invariant un point déterminé *correspond* donc au sous-groupe de G d'où nous sommes partis pour arriver à la forme (15) de l'équation proposée. Or M. Lie a démontré que si deux groupes *isomorphes* transitifs, dans le même nombre de variables, sont tels que les sous-groupes qui laissent invariant dans chacun d'eux un point arbitraire, mais déterminé, sont correspondants, ces deux groupes sont *semblables*, c'est-a-dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables. Si ces groupes sont d'ordre r et à q variables, les transformations infinitésimales $C_1 f, C_2 f, \ldots, C_r f$ du premier groupe sont liées par $r-q$ relations linéaires à coefficients variables

$$\begin{cases} C_{q+1} f = \phi_{1,1} C_1 f + \ldots + \phi_{1,q} C_q f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_r f = \phi_{r-q,1} C_1 f + \ldots + \phi_{r-q,q} C_q f, \end{cases}$$

où les ϕ sont des fonctions des variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$; si alors on est parvenu à déterminer dans le 2e groupe r transformations infinitésimales $D_1 f, \ldots, D_r f$ telles que les $(D_i D_k)$ s'expriment au moyen des Df de la même façon que les crochets correspondants $(C_i C_k)$ au moyen des Cf, il existe également $r-q$ relations linéaires

$$D_{q+i} f = \psi_{i,1} D_1 f + \ldots + \psi_{i,q} D_q f, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-q)$$

où les ψ sont des fonctions des variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ du second groupe. Le changement de variables qui permet de passer de l'un des groupes à l'autre est alors complètement défini par les équations

$$\phi_{ik}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) = \psi_{ik}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q).$$

Si donc, dans le cas particulier qui nous occupe, nous connaissons un groupe particulier à q variables, isomorphe au groupe G et tel que le sous-groupe qui laisse invariant un point arbitraire soit isomorphe au sous-groupe g, nous pourrons, à condition de savoir établir une correspondance isomorphique entre les transformations infinitésimales de $\overline{G}$ et celles du nouveau groupe, ramener, par un changement de variables l'équation (15) à une forme que nous pourrons appeler *canonique*. C'est ainsi par exemple que si le groupe simple $\overline{G}$ est à trois paramètres et une variable, on pourra utiliser le groupe particulier

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

également à trois paramètres et une variable, dont les transformations infinitésimales sont

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad z^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

et ramener l'équation (15) à la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \xi_1(x)\frac{\partial f}{\partial z} + \xi_2(x)\,z\frac{\partial f}{\partial z} + \xi_3(x)\,z^2\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou à l'équation de Riccatti

$$\frac{dz}{dx} = \xi_1(x) + \xi_2(x)\,z + \xi_3(x)\,z^2.$$

Il résulte de tout cela que si on peut faire pour tous les groupes simples possibles la suite d'opérations qui vient d'être indiquée, on sera toujours ramené à des équations de formes connues à l'avance, équivalentes d'ailleurs à des systèmes d'équations différentielles ordinaires dont le type le plus simple est l'équation de Riccatti. Tout se ramenera en fin de compte à l'étude de ces systèmes *canoniques* d'équations différentielles.

§ 2.

Nature des opérations nécessaires pour appliquer la méthode de M. Lie.

En résumé la méthode d'intégration qui vient d'être exposée exige qu'on sache effectuer les opérations suivantes.

1° Etant données les équations finies d'un groupe, trouver les équations finies d'un de ses sous-groupes et en déduire les invariants de ce sous-groupe.

2° Connaissant la structure d'un groupe, décomposer ce groupe en une série normale de sous-groupes.

3° Ramener chaque structure de groupe simple à une forme canonique pour laquelle on connaisse un sous-groupe maximum et déterminer par ses équations finies et ses transformations infinitésimales un groupe transitif dont la structure se présente immédiatement sous la forme canonique considérée et tel que le sous-groupe qui laisse invariant un point déterminé soit le sous-groupe maximum considéré.

Le premier problème a été traité par M. Lie. Il n'exige aucune intégration si le sous-groupe dont on cherche les équations finies contient toutes les trans-

formations infinitésimales distinguées du groupe total, dans le cas où ce dernier en contient. Si parmi les transformations distinguées du groupe total, il s'en trouve h indépendantes et h seulement qui ne fassent pas partie du sous-groupe considéré, la recherche des invariants de ce sous-groupe exige tout au plus h quadratures indépendantes. Il peut être nécessaire en outre de résoudre certaines équations algébriques, mais ces équations peuvent être évitées si l'on a résolu les deux derniers problèmes énoncés.

Ces deux problèmes sont de nature purement algébrique. C'est leur résolution qui fait principalement l'objet de ce travail. Elle se ramène, comme on le verra, à la résolution d'un certain nombre d'équations algébriques à *groupes connus* et ces équations rentrent toutes dans un certain nombre de types connus à l'avance. Mais avant d'exposer cette théorie, il est nécessaire de rappeler quelques résultats fondamentaux de la théorie de la structure des groupes.

On sait qu'on appelle *groupe dérivé* d'un groupe défini par r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ le groupe engendré parles crochets $(X_i X_k)$; c'est un sous-groupe invariant du groupe total.

Si on désigne par $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \ldots + e_r X_r f$ la transformation infinitésimale la plus générale du groupe, et si on effectue un changement de variables appartenant au groupe, cette transformation infinitésimale conserve la même forme, mais les coefficients $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sont changés; les transformations que subissent ces coefficients, regardés comme des variables, définissent un groupe qui est dit le *groupe adjoint* du groupe primitif; ce groupe est d'ordre $r - \rho$ si le groupe primitif contient ρ transformations infinitésimales distinguées indépendantes. On en a immédiatement les équations finies si on connaît les équations finies du groupe primitif; quant à ses transformations infinitésimales, elles ne dépendent que de la structure du groupe, c'est-à-dire des constantes c_{iks} qui entrent dans les relations

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} X_s f.$$

On a en effet les r transformations infinitésimales suivantes du groupe adjoint:

$$E_\mu f = \sum_{s,\, i}^{1,\, 2,\, \ldots,\, r} e_s c_{s\mu i} \frac{\partial f}{\partial e_i}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r),$$

correspondant aux transformations infinitésimales de même indice du groupe primitif.

groupe G^r ne c
ni-simple. Tout
rtain nombre
angeables entre e
ıales quelconque

que structure d
ıctéristique. Si
d'ordre r, il y e
de l'équation ca
'entre elles.
ures de groupes
e des relations
ique. Elles ren
particuliers à ce

$(i \neq j;$
$(i \neq j;$
$(i \neq j;$
$(i \neq j;$

$\vdash \varpi_k), \pm 3\varpi_0,$
$(i \neq j \neq k;\ i,$
$+ 3\varpi_0 = 0;$
$), \pm (\varpi_i + \varpi_j +$
$(i \neq j \neq k;\ i,$
$+ 2\varpi_0 = 0;$
$\vdash \varpi_k),$
$(i \neq j \neq k;\ i,$
$= 0;$
$\frac{\pm \varpi_2 \pm \varpi_3 \pm \varpi_4}{2};$
(

t., p. 53.

Les racines sont toutes simples et, comme on le voit, deux à deux égales et de signes contraires.

On obtiendra toutes les structures de groupes *semi-simples* de rang l en juxtaposant de toutes les façons possibles des structures de groupes simples de rang inférieur ou égal à l de façon que la somme de leurs rangs soit precisément égale à l.

Etant donné un groupe simple ou semi-simple de rang l, l'équation caractéristique de ce groupe admet l racines identiquement nulles et l seulement; une transformation infinitésimale arbitraire est alors échangeable avec $l-1$ autres transformations infinitésimales indépendantes, et ces l transformations infinitésimales sont toutes échangeables entre elles. Elles forment par suite un sous-groupe γ d'ordre l. Si on suppose que $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_l f$ sont ces transformations, l'équation caractéristique *relative* à ce sous-groupe, c'est-à-dire obtenue en faisant dans l'équation caractéristique du groupe

$$e_{l+1} = e_{l+2} = \ldots = e_r = 0,$$

se décompose en un produit de facteurs linéaires, de sorte que les racines deviennent des formes linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_l$, et parmi ces formes il y en a encore l indépendantes. Si donc ω_α est une racine quelconque de l'équation caractéristique réduite, il existe une transformation infinitésimale Xf et une seule telle que

$$(e_1 X_1 + e_2 X_2 + \ldots + e_l X_l,\ X) = \omega_\alpha Xf.$$

A chaque racine *appartient* ainsi une transformation infinitésimale; l'ordre du groupe est par suite égal au nombre des racines augmenté de l.

C'est ainsi qu'un groupe *simple* de rang l est d'ordre

$r = l(l+2)$	(type A)),	$r = 78$	(type E), $l = 6$),
$r = l(2l+1)$	(type B) ou C)),	$r = 133$	(type E), $l = 7$),
$r = l(2l-1)$	(type D)),	$r = 248$	(type E), $l = 8$),
$r = 52$	(type F), $l = 4$),	$r = 14$	(type G), $l = 2$).

Enfin on peut encore *associer* à chaque racine de l'équation caractéristique une transformation infinitésimale du sous-groupe γ. On a ainsi $r - l$ transformations parmi lesquelles l et l seulement sont indépendantes. Si $Y_\alpha f$ est la transformation du sous-groupe γ *associée* à la racine ω_α et si $X_\beta f$ est la transformation du groupe total qui appartient à la racine ω_β, on a

$$(Y_\alpha X_\beta) = a_{\beta\alpha} X_\beta f,$$

où les $a_{\beta\alpha}$ sont des entiers; en particulier $a_{\alpha\alpha} = -2$. Les transformations infinitésimales associés aux différentes racines peuvent s'exprimer en fonctions linéaires de l transformations indépendantes d'un façon tout à fait analogue à celle dont les racines correspondantes s'expriment en fonction de l quantités indépendantes. Il n'y a dans les expressions precédemment écrites qu'à changer partout

$$\pm \varpi_i \pm \varpi_j \quad \text{en} \quad \frac{\pm Y_i f \pm Y_j f}{2}, \qquad \text{(types } B), F))$$

$$\frac{\pm \varpi_i \pm \varpi_j}{2} \quad \text{en} \quad \pm Y_i f \pm Y_j f; \qquad \text{(type } C))$$

$$\varpi_i - \varpi_j \quad \text{en} \quad \frac{Y_i f - Y_j f}{3}, \qquad \text{(type } G))$$

et dans toutes les autres expressions à remplacer ϖ par Yf.

On conçoit maintenant qu'en multipliant au besoin les transformations infinitésimales qui appartiennent aux différentes racines par des coefficients constants convenables, on ait ce qu'on peut appeler une *forme canonique* de la structure du groupe. En effet on peut arriver ainsi à faire que tous les coefficients c_{ikt} soient nuls ou entiers ou tout au moins égaux à des fractions simples.

Nous sommes maintenant en état de traiter les deux problèmes énoncés au début de ce paragraphe.

§3.

Décomposition d'un groupe en une série normale de sous-groupes.

Le problème est le suivant:

Etant donné un groupe G, trouver une série de sous-groupes de G

$$G, \; G_1, \; G_2, \ldots,$$

telle que chaque groupe G_i de cette série soit un sous-groupe invariant du groupe G_{i-1} qui le précède immédiatement et ne soit contenu dans aucun sous-groupe invariant plus grand de ce groupe G_{i-1}.

Si G est intégrable, il suffit, pour obtenir la solution du problème, de remarquer que le groupe dérivé de G a nécessairement moins de paramètres que G; car le groupe G d'ordre r admettant par hypothèse un sous-groupe invariant G_1 d'ordre $r-1$, les différents crochets $(X_i X_k)$ font nécessairement partie de G_1. Il suffira alors de chercher le groupe dérivé, ce qui se fait immédiate-

ment si on connaît les constantes c_{iks}, et d'ajouter aux r_1 transformations infinitésimales qui définissent ce groupe dérivé $r - r_1 - 1$ autres transformations infinitésimales indépendantes; on obtiendra ainsi un sous-groupe invariant qu'on pourra prendre pour le premier terme de la série cherchée. On procédera pour ce groupe comme pour le précédent et ainsi de suite. Par exemple le groupe dont les transformations infinitésimales sont

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_4 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

a son groupe dérivé défini par les transformations

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_4) = (X_2 X_4) = 0, \quad (X_1 X_3) = X_2 f, \quad (X_2 X_3) = -X_1 f.$$

On peut donc prendre la série suivante

$$\begin{aligned} G &: (X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f,\ X_4 f), \\ G_1 &: (X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f), \\ G_2 &: (X_1 f,\ X_2 f), \\ G_3 &: (X_1 f), \\ G_4 &: 1. \end{aligned}$$

Si le groupe G n'est pas intégrable, on peut toujours, comme il est dit au paragraphe précédent, trouver son plus grand sous-groupe invariant intégrable Γ en résolvant les équations linéaires

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} c_{ik\rho} \frac{\partial \psi_2}{\partial e_\rho} = 0. \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots, r).$$

On peut toujours, d'après ce qui précède, décomposer ce groupe Γ en une série normale de sous-groupes, soit

$$\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2, \ldots.$$

Il existe, comme on l'a vu, un groupe g semi-simple, isomorphe à G et à la transformation identique duquel correspond dans G le sous-groupe invariant Γ. Imaginons qu'on ait décomposé ce groupe g en une série normale de sous-groupes

$$g,\ g_1,\ g_2, \ldots, 1.$$

Si $G_1, G_2, \ldots, \Gamma$ sont les sous-groupes de G qui correspondent aux sous-groupes $g_1, g_2, \ldots, 1$ de g, il est clair que la série

$$G,\ G_1,\ G_2, \ldots, \Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2, \ldots$$

résout le problème.

On peut donc toujours se ramener au cas où le groupe proposé est *semi-simple.* Or pour un groupe semi-simple la question se réduit immédiatement à trouver tous les sous-groupes invariants simples qui composent le groupe donné, sous-groupes invariants qui sont parfaitement déterminés. Si en effet le sous-groupe semi-simple G est composé des sous-groupes invariants simples $g_1, g_2, \ldots, g_h$, il suffit de prendre *par exemple* pour G_1 le groupe semi-simple composé de $g_2, \ldots, g_h$; pour G_2 le groupe semi-simple composé de $g_3, \ldots, g_h$, et ainsi de suite.

Or l'équation caractéristique du groupe G nous donne immédiatement le rang l de ce groupe (par le nombre des racines nulles). Mais il n'existe qu'un nombre fini de structures de groupes semi-simples de rang l, et à plus forte raison à la fois de rang l et d'ordre r. C'est ainsi qu'un groupe semi-simple de rang 4 et d'ordre 24 peut être donné:

ou bien par un groupe simple de rang 4 et du type A);

ou bien par un groupe simple de rang 3 du type B) ou C), et un groupe simple de rang 1;

ou bien par un groupe simple de rang 2 du type B) ou C) et un groupe simple de rang 2 du type G).

On a donc dans chaque cas à hésiter entre un nombre fini, et en général restreint, d'hypothèses possibles. Voici comment on pourra décider quelle est l'hypothèse exacte.

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ les racines de l'équation caractéristique d'un groupe semi-simple quelconque. Ces racines sont liées par certaines relations linéaires dont les unes sont de la forme

$$\omega_i + \omega_j = 0$$

et d'autres de la forme

$$\omega_i + \omega_j + \omega_k = 0.$$

L'ensemble des relations de ces deux formes qui existent entre les racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ *caractérise complètement, l étant donné, la structure du groupe semi-simple considéré.* Autrement dit toutes les relations entre les racines sont des conséquences de celles-là. Il suffit évidemment de vérifier que pour chaque groupe simple on peut trouver $2l$ racines deux à deux égales et de signes contraires qui, ajoutées deux à deux, permettent d'obtenir successivement, en répétant au besoin l'opération pour les nouvelles racines obtenues, toutes les racines de l'équation caractéristique. Or on y arrive facilement en prenant dans chacun des cas qui peuvent

se présenter les racines suivantes, où les notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent,

A) : $\pm \varpi_i$;

B) : $\pm \varpi_i$;

C) : $\pm \varpi_1$, $\frac{\pm(\varpi_1 + \varpi_i)}{2}$;

D) : $\pm(\varpi_2 + \varpi_3)$, $\pm(\varpi_1 + \varpi_i)$;

E) : $\pm(\varpi_1 - \varpi_i)$, $\pm(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3)$;

F) : $\pm \varpi_1$, $\pm \frac{\varpi_1 - \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_4}{2}$, $\pm \frac{\varpi_1 + \varpi_2 - \varpi_3 + \varpi_4}{2}$, $\pm \frac{\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - \varpi_4}{2}$;

G) : $\pm \varpi_1$, $\pm \varpi_2$.

Cela étant considérons une structure de groupe semi-simple de rang l et d'ordre r. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_p$ toutes les expressions de la forme $\omega_i + \omega_j$ qui s'annulent lorsque $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ sont les racines de l'équation caractéristique du groupe considéré, et de même par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ toutes les expressions de la forme $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ qui jouissent de le même propriété. Formons la transformée suivante de l'équation caractéristique ; posons

$$u = (a + P_1)(a + P_2) \ldots (a + P_p)(a + Q_1)(a + Q_2) \ldots (a + Q_q),$$

a désignant une indéterminée. La fonction u de $\omega_1, \omega_2, \omega_{r-l}$ est donnée par une certaine équation algébrique, par un procédé bien connu. Cette équation algébrique admettra, quels que soient $e_1, e_2, \ldots, e_r$, la racine a^{p+q}.

Réciproquement si on fait la même transformée pour un autre groupe semi-simple, également de rang l et d'ordre r, et si cette transformée admet la racine a^{p+q} où a est laissé indéterminé, ce second groupe sera isomorphe au premier, car il sera possible de donner aux racines de son équation caractéristique des indices tels que

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_p = Q_1 = Q_2 = \ldots Q_q = 0,$$

et on a vu qu'une structure de groupe semi-simple était complètement caractérisée par les relations linéaires de cette forme entre les racines de l'équation caractéristique. Il est d'ailleurs bien évident qu'il n'est pas nécessaire de faire la transformée de l'équation caractéristique elle-même, mais seulement de l'équation caractéristique relative au sous-groupe γ dont il a déjà été parlé, et qu'on obtient en partant d'une transformation infinitésimale arbitraire du groupe proposé.

On a donc ainsi un moyen de reconnaître par de simples éliminations la *nature* des sous-groupes invariants simples qui composent un groupe semi-simple donné. C'est ainsi par exemple qu'un groupe semi-simple de rang 3 et d'ordre 11 sera formé d'un sous-groupe simple de rang 2 et du type A) et d'un sous-groupe simple de rang 1, si la transformée en

$$u = (a+\omega_1+\omega_2)(a+\omega_3+\omega_4)(a+\omega_5+\omega_6)(a+\omega_7+\omega_8)(a+\omega_1+\omega_4+\omega_6)(a+\omega_2+\omega_3+\omega_5)$$

admet la racine a^6.

On peut aller plus loin. La fonction u de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ admet un certain groupe de substitutions G des $r-l$ lettres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$. Ce groupe de substitutions ne change pas l'ensemble des quantités $P_1, P_2, \ldots, P_p$, non plus que l'ensemble des quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$. Ce groupe de substitutions peut encore être défini par l'ensemble des substitutions qui conservent les relations

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_p = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_q = 0,$$

ou encore qui ne changent par les relations qui existent entre les $r-l$ racines de l'équation caractéristique. C'est ce qu'on appelle, d'après Galois, *le groupe de substitutions de cette équation.*

Toute fonction rationnelle de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ qui admet le groupe G peut, d'après un théorème de Lagrange, s'exprimer en fonction rationnelle d'un *invariant caractéristique* du groupe, c'est-à-dire d'une fonction des racines qui admette le groupe G et les substitutions seulement de ce groupe. Or ici nous connaissons un invariant caractéristique, c'est évidemment la fonction u dont la valeur numérique, lorsqu'on y remplace $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ par les racines de l'équation caractéristique est a^{p+q}. Nous connaissons donc finalement la valeur numérique de toute fonction rationnelle des racines qui admet le groupe G, et par suite nous sommes en mesure d'appliquer la théorie de Galois à la résolution de l'équation caractéristique.

Pour le problème spécial qui nous occupe, à savoir la décomposition du groupe semi-simple G en une série normale de sous-groupes, il nous suffit de pouvoir séparer les sous-groupes invariants simples qui composent le groupe G. Pour cela il suffit de séparer, dans l'équation caractéristique, les facteurs qui appartiennent à chacun d'eux. On peut même se borner à considérer l'équation caractéristique *réduite* relative au sous-groupe γ d'ordre l du groupe G, dont il

a déjà été question. Si $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_l f$ désignent les transformations infinitésimales de ce sous-groupe, ce qu'on peut toujours supposer, les équations

$$\frac{\partial \psi_2(e_1, e_2, \ldots, e_r)}{\partial e_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial e_2} = \ldots = \frac{\partial \psi_2}{\partial e_l} = 0$$

définissent l'ensemble des transformations infinitésimales de G qui *appartiennent* aux différentes racines (autrement dit qui, combinées avec $e_1 X_1 f + \ldots + e_l X_l f$, se reproduisent à un facteur constant près) et de celles qui s'en déduisent linéairement. On peut donc toujours supposer que ces transformations sont $X_{l+1} f, \ldots, X_r f$. Cela étant, si on a trouvé dans l'équation caractéristique *réduite* en $\omega, e_1, e_2, \ldots, e_l$, les facteurs relatifs au sous-groupe invariant simple g_1, soit

$$\omega^{r_1} + \phi_2(e_1, e_2, \ldots, e_l)\,\omega^{r_1 - 2} + \ldots,$$

les équations

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial e_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \phi_2}{\partial e_l} = 0,$$

définiront l'ensemble des transformations de γ qui ne font pas partie de g_1. Alors le groupe g_1 est défini par celles des transformations $e_{l+1} X_{l+1} f + \ldots + e_r X_r f$ qui sont échangeable avec les précédentes, et par les crochets de ces nouvelles transformations deux à deux.

Tout revient donc à calculer l'équation caractéristique de g_1. Pour cela, si les racines (inconnues) de cette équation sont par exemple $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda$, il suffit de calculer la fonction rationnelle des racines

$$U_1 = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \ldots (\omega - \omega_\lambda);$$

si le groupe g_1 est seul de sa structure dans G, cette fonction rationnelle des $r - l$ racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-l}$ admettra nécessairement le groupe de substitutions G qui ne peut que conserver l'ensemble des racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda$, et par suite cette fonction rationnelle sera *connue*. Si au contraire il y a $\alpha - 1$ autres sous-groupes invariants simples isomorphes à g_1, toute fonction symétrique des α quantités U correspondantes sera également connue et par suite U_1 sera donnée par une équation de degré α, pouvant d'ailleurs être quelconque.

En résumé *si parmi les structures des sous-groupes invariants simples qui composent le groupe semi-simple donné G, il y en a h distinctes, α_1 de ces sous-groupes simples ayant la première structure, α_2 la deuxième, etc., la décomposition du groupe en une série normale de sous-groupes exige la résolution de h équations algébriques de degrés respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$.*

Appliquons cette théorie au groupe défini par les 6 transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} + y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots\right),$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z} + z\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots\right),$$

$$X_4 f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_5 f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y},$$

et qui est le groupe des mouvements de l'espace non euclidien. On forme facilement les crochets $(X_i X_k)$ et l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -\omega & -e_6 & e_5 & 0 & -e_3 & e_2 \\ e_6 & -\omega & -e_4 & e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_5 & e_4 & -\omega & -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & -e_3 & e_2 & -\omega & -e_6 & e_5 \\ e_3 & 0 & -e_1 & e_6 & -\omega & -e_4 \\ -e_2 & e_1 & 0 & -e_5 & e_4 & -\omega \end{vmatrix} = \omega^6 + 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2)\omega^4 + \ldots = 0.$$

Le groupe est son propre groupe dérivé et les équations qui définissent le plus grand sous-groupe invariant intégrable sont

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial e_1} = 4e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0, \quad e_5 = 0, \quad e_6 = 0.$$

Le groupe n'admet pas de sous-groupe invariant intégrable : il est semi-simple. Etant d'ordre 6, il est facile de voir a priori, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent que son rang ne peut être que 2, et en effet le dernier coefficient différent de zéro dans l'équation caractéristique est celui de ω^2.

Déterminons un sous-groupe γ en partant par exemple de $X_1 f$ et cherchant les transformations infinitésimales échangeables avec $X_1 f$: on trouve $X_4 f$. Les équations

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial e_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial e_4} = 0$$

montrent que les transformations infinitésimales qui appartiennent aux différentes racines de l'équation caractéristique relative à γ se déduisent de $X_2 f$, $X_3 f$, $X_5 f$, $X_6 f$.

L'équation caractéristique réduite est

$$\omega^6 + 2(e_1^2 + e_4^2)\omega^4 + (e_1^4 - 2e_1^2 e_4^2 + e_4^4)\omega^2 = 0.$$

Ici il n'y a qu'une hypothèse à faire sur les structures des différents sous-groupes invariants simples: il y en a nécessairement deux de rang 1. Pour chacun d'eux l'équation caractéristique admet deux racines égales et de signes contraires, par suite il suffit de résoudre l'équation du second degré en ω^2

$$\omega^4 + 2(e_1^2 + e_4^2)\omega^2 + e_1^4 - 2e_1^2 e_4^2 + e_4^4 = 0$$

ce qui donne

$$\omega^2 + (e_1 + e_4)^2 = 0 \qquad \text{pour } g_1,$$
$$\omega^2 + (e_1 - e_4)^2 = 0 \qquad \text{pour } g_2.$$

La transformation infinitésimale de γ qui ne fait pas partie de g_1 est alors $X_1 f - X_4 f$ $(e_1 + e_4 = 0)$; les transformations infinitésimales $e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_5 X_5 f + e_6 X_6 f$ échangeables avec $X_1 f - X_4 f$ se déduisent de $X_2 f + X_5 f$, $X_3 f + X_6 f$, qui, combinées, donnent $X_1 f + X_4 f$. Donc g_1 est déterminé par $X_1 f + X_4 f$, $X_2 f + X_5 f$, $X_3 f + X_6 f$. De même g_2 est déterminé par $X_1 f - X_4 f$, $X_2 f - X_5 f$, $X_3 f - X_6 f$.

§4.

Réduction de la structure d'un groupe simple à sa forme canonique.

Au point où nous en sommes, le problème se réduit au suivant:

Etant donnée l'équation caractéristique relative à un sous-groupe γ d'un groupe simple donné G de rang l et d'ordre r, résoudre cette équation caractéristique, connaissant son groupe de substitutions G.

Si en effet on connaît une forme canonique de la structure du groupe, cette forme canonique correspond à une équation caractéristique dont on connaît d'avance les racines; l'identification des racines des deux équations donne alors la correspondance entre les transformations infinitésimales des deux sous-groupes γ, et on en déduit immédiatement dans le groupe donné, les transformations infinitésimales qui *appartiennent* aux différentes racines.

Par exemple, dans le cas particulier traité à la fin du paragraphe précédent, on arrive à deux groupes simples de rang 1. La forme canonique de la structure d'un groupe simple de rang 1 est par exemple la suivante

$$(Y_1 Y_2) = -2Y_2 f, \quad (Y_1 Y_3) = 2Y_3 f, \quad (Y_2 Y_3) = Y_1 f,$$

où le sous-groupe γ formé de $Y_1 f$ est mis en évidence. L'équation caractéristique relative à ce sous-groupe est ici

$$-\omega(\omega^2 - 4f_1^2) = 0.$$

En posant dans le premier des groupes simples trouvés à la fin du paragraphe précédent

$$X_1 f + X_4 f = Z_1 f, \quad X_2 f + X_5 f = Z_2 f, \quad X_3 f + X_6 f = Z_3 f,$$

l'équations caractéristique relative au sous-groupe γ formé de $Z_1 f$ est

$$-\omega(\omega^2 + 4g_1^2) = 0.$$

Il suffira donc de poser $g_1 = if_1$, c'est-à-dire de prendre pour transformation $Y_1 f$ la transformation $iZ_1 f$. Alors $Y_2 f$ sera la transformation qui appartient à la racine -2, à savoir $Z_2 f - iZ_3 f$ (à un facteur constant près) et $Y_3 f$ celle qui appartient à la racine $+2$, à savoir $Z_2 f + iZ_3 f$ (à un facteur constant près). En prenant

$$Y_2 f = \tfrac{1}{2}(Z_2 f - iZ_3 f), \quad Y_3 f = \tfrac{1}{2}(Z_2 f + iZ_3 f),$$

on aura bien

$$(Y_2 Y_3) = Y_1 f = iZ_1 f.$$

Dans le cas général les transformations qui *appartiennent* aux différentes racines ne seront également définies, du moins directement, qu'à des facteurs constants près. Mais on se rappelle que dans tous les cas il existe $2l$ racines, deux à deux égales et de signes contraires, qui par additions et soustractions, donnent toutes les autres. On donnera aux facteurs constants qui interviennent dans les transformations infinitésimales qui appartiennent à ces $2l$ racines des valeurs quelconques, les facteurs relatifs à deux racines égales et de signes contraires étant néanmoins tels que le crochet des deux transformations s'exprime au moyen des transformations canoniques du sous-groupe γ comme dans la forme canonique de la structure; les transformations infinitésimales appartenant aux autres racines se déduiront des $2l$ premières par des combinaisons mutuelles et sans ambiguité, si l'on se donne naturellement la forme canonique de la structure.

Revenons donc au problème définitif, à savoir la résolution de l'équation caractéristique relative à un sous-groupe γ donné. Une petite remarque permet de simplifier *formellement* cette équation; il suffit d'observer que les racines étant nécessairement des formes linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_l$, si l'équation obtenu en y faisant, par exemple,

$$e_1 = 1, \quad e_2 = e_3 = \ldots = e_l = 0,$$

n'admet pas de racine multiple, il suffira de résoudre cette équation pour en déduire immédiatement (par des équations linéaires) les racines de l'équation primitive.

La nature des équations auxiliaires nécessaires pour résoudre l'équation donnée, depend alors essentiellement, d'après la théorie de Galois, à laquelle est tout à fait analogue la théorie d'intégration de M. Lie exposée au paragraphe premier, de la structure du groupe de substitutions G. La première chose à faire est donc d'étudier les différents groupes de substitutions relatifs aux différents types de groupes de transformations simples.

1°. *Type* A). En remplaçant, dans les racines relatives à ce type données au paragraphe 2, les quantités $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_l$ par $\varpi_1 - \varpi_{l+1}, \varpi_2 - \varpi_{l+1}, \ldots, \varpi_l - \varpi_{l+1}$, avec la condition

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_{\ +1} = 0,$$

les racines se mettent sous la forme

$$\omega_{i,j} = \varpi_i - \varpi_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l+1).$$

L'équation caractéristique peut alors être regardée comme l'équation aux différences de deux équations de degré $l+1$ pour lesquelles la somme des racines est nulle, à savoir de l'équation qui a pour racines

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{l+1} \tag{S}$$

et de celle qui a pour racines

$$-\varpi_1, -\varpi_2, \ldots, -\varpi_{l+1}. \tag{S'}$$

A toute substitution effectuée sur les racines $\omega_{i,j}$ correspond une substitution effectuée sur les quantités $\pm \varpi_i$. Il suffit en effet de remarquer qu'il existe des systèmes de l racines $\omega_{i,j}$ telles que les différences de deux quelconques de ces racines soient encore des racines $\omega_{i,j}$. Ces systèmes sont de deux sortes: les premiers sont de la forme

$$\varpi_1 - \varpi_2,\ \varpi_1 - \varpi_3, \ldots, \varpi_1 - \varpi_{l+1},$$

et les seconds de la forme

$$\varpi_2 - \varpi_1,\ \varpi_3 - \varpi_1, \ldots, \varpi_{l+1} - \varpi_1,$$

et il est clair qu'on peut faire correspondre d'une façon univoque les quantités ϖ_i à ces différents systèmes, ϖ_1 correspondant par exemple au premier système

écrit, $-\varpi_1$ au second. Cela étant toute substitution effectuée sur les $\omega_{i,j}$ échangera entre aux ces systèmes et par suite les quantités $\pm\varpi_i$. Mais il est bien clair que cette substitution ou bien laissera invariant chacun des ensembles (S) et (S'), ou bien échangera entre eux ces deux ensembles. Réciproquement toute substitution des $l+1$ indices $1, 2, \ldots, l+1$, suivie ou non de la substitution

$$(\varpi_1, -\varpi_1)(\varpi_2, -\varpi_2)\ldots(\varpi_{l+1}, -\varpi_{l+1})$$

qui permute (S) et (S') donnera une substitution correspondante des racines $\omega_{i,j}$.

Le groupe G de substitutions des racines $\omega_{i,j}$ comprend d'après cela un sous-groupe invariant G_1 formé des substitutions de G qui ne changent ni (S) ni (S') et qui n'est autre que le groupe symétrique de $l+1$ lettres. Le groupe G_1 fournit un groupe isomorphe à G, à savoir $G|G_1$ et qui n'est autre que le groupe des substitutions de (S) et de (S').

Les indices de composition sont donc 2 et ceux de G_1. *La résolution de l'équation caractéristique se ramène à celle d'une équation du 2e degré et à celle d'une équation générale de degré $l+1$.**

D'ailleurs ce résultat est immédiat. Posons

$$U = (x-\varpi_1)(x-\varpi_2)\ldots(x-\varpi_{l+1}).$$

L'équation $U=0$ est une transformée de l'équation primitive, à savoir

$$U = \left(x - \frac{\omega_{1,2}+\omega_{1,3}+\ldots+\omega_{1,l+1}}{l+1}\right)\ldots$$
$$\times\left(x - \frac{\omega_{l+1,1}+\omega_{l+1,2}+\ldots+\omega_{l+1,l}}{l+1}\right) = 0.$$

De même on a l'équation

$$U' = \left(x - \frac{\omega_{2,1}+\omega_{3,1}+\ldots+\omega_{l+1,1}}{l+1}\right)\ldots$$
$$\times\left(x - \frac{\omega_{1,l+1}+\omega_{2,l+1}+\ldots+\omega_{l,l+1}}{l+1}\right) = 0,$$

qui donne $-\varpi_1, -\varpi_2, \ldots, -\varpi_{l+1}$. Toute fonction symétrique de U et de U' admet manifestement le groupe G et par suite est connue ; donc U par exemple

* Toutefois, si $l=1$, les deux systèmes (S) et (S') ne sont pas distincts et il n'y a qu'à extraire une racine carrée.

est donnée par une équation du second degré; $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_l$ sont ensuite obtenus en résolvant l'équation de degré $l+1$

$$U = 0,$$

et leur connaissance entraîne celle de toutes les racines $\omega_{i,k}$.

En somme le problème traité est le suivant: Trouver une équation en x de degré $l+1$, manquant de terme en x^l, connaissant son équation aux différences.

2°. *Type* B). Ici les racines sont

$$\pm \varpi_i, \quad \pm \varpi_i \pm \varpi_j; \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Les $2l$ racines $\pm \varpi_i$ jouent ici un rôle particulier. En effet il existe $4(l-1)$ racines que ajoutées à ϖ_1 donnent d'autres racines, ce sont

$$\pm \varpi_i, \ -\varpi_1 \pm \varpi_i; \qquad (i = 2, 3, \ldots, l)$$

au contraire il n'existe que $2(2l-3) = 4l-6$ racines qui ajoutées à $\varpi_1 + \varpi_2$ donnent d'autres racines, ce sont

$$-\varpi_1, \ -\varpi_2, \ -\varpi_1 \pm \varpi_i, \ -\varpi_2 \pm \varpi_i. \qquad (i = 3, 4, \ldots, l).$$

Cela étant le groupe G se réduit au groupe de substitutions des $2l$ racines $\pm \varpi_i$. Autrement dit on peut former l'équation qui donne $\pm \varpi_i$.

La résolution de l'équation caractéristique se ramène à la résolution d'une équation de degré l suivie de l extractions de racines carrées.

L'expression

$$U = (x^2 - \varpi_1^2) \ldots (x^2 - \varpi_l^2)$$

admet manifestement le groupe G, puisque ce groupe ne peut qu'échanger entre elles les quantités $\pm \varpi_i$ et par suite est connue.

3°. *Type* C). Les racines sont

$$\pm \varpi_i, \ \frac{\pm \varpi_i \pm \varpi_j}{2}. \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Ici aussi les racines $\pm \varpi_i$ jouent un rôle particulier. On verra, comme pour le type B), qu'il y a $2(l-1)$ racines qui, ajoutées à ϖ_1, donnent d'autres racines, tandis qu'il y en a $4(l-1)$ qui, ajoutées à $\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2}$, donnent d'autres racines. On arrive donc aux mêmes résultats que tout à l'heure.

La résolution de l'équation caractéristique se ramène à celle d'une équation de degré l suivie de l extractions de racines carrées.

4°. *Type* D). Les racines sont

$$\pm \varpi_i \pm \varpi_j. \qquad (i \neq j\,;\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ l). \quad l \geqslant 4.$$

Ici aussi on est ramené à une résolvante de degré l. Avant de montrer comment on y arrive, je conviendrai de dire, d'une manière générale, que deux racines de l'équation caractéristique sont *alliées* lorsque leur différence est une nouvelle racine de l'équation caractéristique.

Cela étant il existe dans le cas du type D) des systèmes de $(l-1)$ racines mutuellement *alliées*. Si l'on part par exemple de $\varpi_1 + \varpi_2$, une racine alliée peut toujours être supposée $\varpi_1 \pm \varpi_3$, par exemple $\varpi_1 + \varpi_3$, et toute racine alliée à ces deux premières est, soit $\varpi_2 + \varpi_3$, soit $\varpi_1 \pm \varpi_i$ $(i > 3)$. Si l est supérieur à 4, la première hypothèse n'est pas possible, parce qu'il n'y a aucune racine alliée à la fois à $\varpi_1 + \varpi_2$, $\varpi_2 + \varpi_3$, $\varpi_3 + \varpi_1$; on a alors un système qui peut toujours se ramener à la forme

$$\varpi_1 + \varpi_2,\ \varpi_1 + \varpi_3,\ \ldots\ldots,\ \varpi_1 + \varpi_l.$$

Si au contraire l est égal à 4, la première hypothèse est possible, et l'on a deux types de systèmes, à savoir

$$\varpi_1 + \varpi_2,\ \varpi_1 + \varpi_3,\ \varpi_1 + \varpi_4$$

et

$$\varpi_1 + \varpi_2,\ \varpi_2 + \varpi_3,\ \varpi_3 + \varpi_1.$$

Etant donné l'un de ces systèmes on peut trouver un second système de $l-1$ racines mutuellement alliées et tel que chaque racine de l'un des systèmes soit alliée à $l-2$ racines de l'autre. On obtient ainsi $2l-2$ racines qui sont de la forme

$$\varpi_1 \pm \varpi_2,\ \varpi_1 \pm \varpi_3,\ \ldots\ldots,\ \varpi_1 \pm \varpi_l, \qquad (l \text{ quelconque})$$

$$\varpi_1 + \varpi_2,\ \varpi_1 + \varpi_3,\ \varpi_1 + \varpi_4,\ \varpi_2 + \varpi_3,\ \varpi_2 + \varpi_4,\ \varpi_3 + \varpi_4. \qquad (l = 4).$$

On peut dans les racines qui viennent d'être écrites, échanger les indices d'une façon quelconque et aussi changer le signe d'une quelconque des quantités ϖ_i.

Il est bien clair que toute substitution du groupe G échangera entre eux ces divers systèmes de $2l-2$ racines. Par suite nous pourrons avoir une résolvante en faisant correspondre à chaque système la somme des racines qui le composent et en prenant les quantités ainsi déterminées pour nouvelles variables. En divisant par $2(l-1)$, on obtient ainsi

$$\pm \varpi_1,\ \pm \varpi_2,\ \ldots\ldots,\ \pm \varpi_l, \qquad (l > 4)$$

$$\pm \varpi_1,\ \pm \varpi_2,\ \pm \varpi_3,\ \pm \varpi_4,\ \frac{\varepsilon_1\varpi_1 + \varepsilon_2\varpi_2 + \varepsilon_3\varpi_3 + \varepsilon_4\varpi_4}{2}, \qquad (l = 4)$$

où les ε sont arbitrairement égaux à $+1$ ou -1,

On voit donc que, *si l est supérieur à 4, la résolution de l'équation caractéristique se ramène à celle d'une équation de degré l suivie de l extractions de racines carrées.*

Au contraire si $l = 4$, on est ramené à une équation du 12e degré: mais cette équation peut se ramener à une équation du 3e degré et une du 4e. Si en effet nous partons de la racine auxiliaire ϖ_1 et que nous cherchions les racines auxiliaires qui lui sont *alliées* (c'est-à-dire, en étendant un peu une convention précédente, telles que la différence entre ϖ_1 et une de ces racines soit une racine de l'équation caractéristique *primitive*), nous trouvons $\pm \varpi_2$, $\pm \varpi_3$, $\pm \varpi_4$; si nous faisons la même opération pour ces quantités, nous trouvons en outre $-\varpi_1$. Donc les 8 racines auxiliaires $\pm\varpi_1$, $\pm\varpi_2$, $\pm\varpi_3$, $\pm\varpi_4$ jouissent de la propriété que toute racine auxiliaire alliée à l'une d'entre elles est encore parmi elles. On trouvera de même deux autres systèmes de 8 racines auxiliaires jouissant de la même propriété, à savoir

$$\frac{\varepsilon_1\varpi_1 + \varepsilon_2\varpi_2 + \varepsilon_3\varpi_3 + \varepsilon_4\varpi_4}{2}, \qquad \text{pour } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = +1,$$

et

$$\frac{\varepsilon_1\varpi_1 + \varepsilon_2\varpi_2 + \varepsilon_3\varpi_3 + \varepsilon_4\varpi_4}{2}, \qquad \text{pour } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = -1.$$

Il est bien clair que le groupe G ou le groupe de la résolvante du 24e degré ne peut qu'échanger entre eux ces trois systèmes. L'équation qui donne les 8 racines de l'un d'entre eux sera donc connue par la résolution d'une équation du 3e degré, et cette équation du 3e degré étant résolue, on n'aura qu'à résoudre l'équation considérée du 8e degré.

Donc, *dans le cas de $l = 4$, la résolution de l'équation caractéristique se ramène à celles d'une équation du 3e degré et d'une équation du 4e degré, suivies de 4 extractions de racines carrées.*

5°. *Type* F). Les racines sont ici

$$\pm \varpi_i,\ \pm \varpi_i \pm \varpi_j,\ \frac{\pm \varpi_1 \pm \varpi_2 \pm \varpi_3 \pm \varpi_4}{2}. \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Chacune des racines $\pm \varpi_i$, $\frac{\pm\varpi_1 \pm\varpi_2 \pm\varpi_3 \pm\varpi_4}{2}$ est alliée à 20 autres racines, tandis que chacune des racines $\pm \varpi_i \pm \varpi_j$ n'est alliée qu'à 18 autres racines. On peut donc se ramener indifféremment à deux résolvantes de degré 24; mais on voit que chacune d'elles est une de celles rencontrées dans le cas du type D), pour $l = 4$. Il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit dans ce cas-là.

La résolution de l'équation caractéristique se ramène à celles d'une équation du 3e degré et d'une équation du 4e degré, suivies de 4 extractions de racines carrées.

6°. *Type* G). Les racines sont

$$\pm \varpi_i,\ \varpi_i - \varpi_j, \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3)$$

avec

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 = 0.$$

Chacune des racines $\pm \varpi_i$ est alliée à 8 autres racines, tandis que chaque racine $\varpi_i - \varpi_j$ n'est alliée qu'à 6 autres racines. Il en résulte qu'on peut prendre pour résolvante l'équation qui donne les 6 racines $\varpi_i - \varpi_j$. On est alors ramené au car du type A).

La résolution de l'équation caractéristique se ramène à celles d'une équation du 2e degré et d'une équation du 3e degré.

7°. *Type* E), $l = 6$. Les racines sont ici

$$\varpi_i - \varpi_j,\ \pm(\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k),\ \pm 3\varpi_0, \qquad (i \neq j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

avec

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_6 + 3\varpi_0 = 0.$$

On peut avoir une résolvante du 54e degré, de la manière suivante. Il est possible de déterminer des systèmes de 16 racines tels que si une quelconque de ces racines est alliée à une autre racine ne faisant pas partie du système considéré, la différence de ces deux racines en fait certainement partie, ou encore tels que si une racine d'un de ces systèmes est la somme de deux racines particulières, l'une au moins de ces deux racines fait partie du système. Il suffit de prendre par exemple les 16 racines

$$\varpi_1 - \varpi_i,\ \varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j,\ -3\varpi_0. \qquad (i \neq j;\ i, j = 2, 3, \ldots, 6).$$

Cherchons tous ces systèmes.

D'abord chacun de ces systèmes doit contenir au moins l'une des racines $\pm(\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k)$, car l'existence dans un système de $\varpi_1 - \varpi_2$ entraîne celle de $\varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_4$ ou de $-\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_4$, et l'existence de $-3\varpi_0$ entraîne celle de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ ou de $\varpi_4 + \varpi_5 + \varpi_6$.

Cela étant supposons d'abord qu'il existe une racine $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ en même temps qu'une racine $\varpi_i - \varpi_j$, où i et j sont deux des indices 1, 2, 3, par exemple $\varpi_1 - \varpi_2$. L'existence de $\varpi_1 - \varpi_2$ entraîne alors celle de

$$\begin{array}{ccc}
\varpi_1 - \varpi_3 & \text{ou} & \varpi_3 - \varpi_2, \\
\varpi_1 - \varpi_4 & \text{ou} & \varpi_4 - \varpi_2, \\
\varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_i & \text{ou} & -\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_i, \\
\varpi_1 + \varpi_4 + \varpi_j & \text{ou} & -\varpi_2 - \varpi_i - \varpi_j.
\end{array}$$

De même l'existence de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ entraîne celle de

$$\begin{array}{rcl} \varpi_1 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_i, \\ \varpi_2 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_i, \\ \varpi_3 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i, \\ -\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6 & \text{ou} & -3\varpi_0\,; \end{array}$$

i, j désignant deux quelconques des indices 4, 5, 6. On a ainsi 20 couples de deux racines dans chacun desquels il faut prendre au moins une racine; mais 12 de ces couples ont deux à deux une racine commune; il faut donc ajouter aux deux racines $\varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ au moins 14 autres racines, ce qui montre déjà que dans l'hypothèse faite il ne peut pas y avoir de systèmes contenant moins de 16 racines. Pour qu'il n'y en ait que 16, il faut nécessairement prendre les 6 racines

$$\varpi_1 - \varpi_i, \quad \varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_i$$

et alors aucune des racines $\varpi_i - \varpi_2$, $-\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_i$, $\varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_i$, $\varpi_2 - \varpi_i$ ne fait partie du système. Deux cas sont alors à distinguer, suivant que l'on prend $\varpi_1 - \varpi_3$ ou $\varpi_3 - \varpi_2$.

L'existence de $\varpi_1 - \varpi_3$ entraîne celle de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i$, $\varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j$; il n'y a plus alors qu'à choisir entre $-\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$ et $-3\varpi_0$; on ne peut pas prendre $-\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$, parce que l'existence de cette racine entraînerait celle de $\varpi_2 - \varpi_4$ ou de $-\varpi_2 - \varpi_5 - \varpi_6$ et qu'aucune de ces dernières racines ne fait partie du système. On a donc en définitive le système

$$\varpi_1 - \varpi_i, \quad \varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j, \quad -3\varpi_0. \qquad (i \neq j;\ i, j = 2, 3, \ldots, 6).$$

Si au contraire on prend $\varpi_3 - \varpi_2$, il faut prendre $\varpi_3 - \varpi_i$, $-\varpi_2 - \varpi_i - \varpi_j$ et il ne reste plus qu'à choisir entre $-\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$ et $-3\varpi_0$; l'existence de $-3\varpi_0$ entraînerait celle de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_4$ ou $\varpi_3 + \varpi_5 + \varpi_6$, ce qui est impossible; donc on a, en changeant les indices 1 et 2, le système,

$$\varpi_1 - \varpi_i, \quad \varpi_2 - \varpi_i, \quad \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i, \quad -\varpi_i - \varpi_j - \varpi_k. \qquad (i, j, k = 3, 4, 5, 6).$$

On obtient d'autres systèmes en changeant dans les précédents toutes les racines de signe.

Il ne reste plus maintenant qu'à chercher les systèmes dans lesquels il n'existe pas simultanément deux racines telles que $\varpi_i - \varpi_j$ et $\pm(\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k)$, les indices i, j étant les mêmes. On peut toujours supposer qu'il existe dans un tel système la racine $-\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$; en désignant par i, j, k les indices 1, 2, 3

et par λ, μ, ν les indices 4, 5, 6, il existe nécessairement une racine de la forme $\varpi_i - \varpi_\lambda$; si non en effet le système contiendrait toutes les racines $-\varpi_i - \varpi_\lambda - \varpi_\mu$, $-\varpi_i - \varpi_j - \varpi_\lambda$, $-\varpi_1 - \varpi_2 - \varpi_3$, c'est-à-dire au moins 20 racines. Supposons donc que le système contienne $\varpi_1 - \varpi_4$; alors il contiendra $\varpi_1 - \varpi_5$ ou $\varpi_5 - \varpi_4$, c'est-à-dire, d'après l'hypothèse faite, $\varpi_1 - \varpi_5$ et de même $\varpi_1 - \varpi_6$. L'existence de $\varpi_1 - \varpi_4$ entraîne celle de

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_5 \quad \text{ou} \quad -\varpi_2 - \varpi_4 - \varpi_5,$$

ce qui exclut nécessairement les racines $\varpi_2 - \varpi_5$, $\varpi_5 - \varpi_2$, de même $\varpi_3 - \varpi_5$, $\varpi_2 - \varpi_6$, $\varpi_3 - \varpi_6$. Il en résulte que le système contient $\varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_1 - \varpi_3$, d'après

$$\varpi_1 - \varpi_5 = (\varpi_1 - \varpi_2) + (\varpi_2 - \varpi_5).$$

En désignant maintenant par i, j, k, trois quelconques des indices 2, 3, ..., 6, le système contient toutes les racines $\varpi_1 - \varpi_i$ et par suite ne contient aucune des racines $\varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j$, par suite aussi il contient toutes les racines $-\varpi_i - \varpi_j - \varpi_k$. Enfin l'existence de $-\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$ entraîne celle de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ ou de $3\varpi_0$, c'est-à-dire celle de $3\varpi_0$ On arrive ainsi aux 16 racines

$$\varpi_1 - \varpi_i, \quad -\varpi_i - \varpi_j - \varpi_k, \quad 3\varpi_0 \qquad (i, j, k = 2, 3, \ldots\ldots, 6)$$

et, en changeant les signes, au système

$$\varpi_i - \varpi_1, \quad \varpi_i + \varpi_j + \varpi_k, \quad -3\varpi_0. \qquad (i, j, k = 2, 3, \ldots\ldots, 6).$$

On obtient ainsi 54 systèmes de 16 racines. Ces 54 systèmes sont évidemment échangés entre eux par toute substitution du groupe G, et par suite on peut former une résolvante du 54e degré. On peut prendre par exemple pour chaque racine de cette résolvante le douzième de la somme des racines qui font partie de chacun des 54 systèmes. On trouve ainsi

$$\pm(\varpi_i - \varpi_0), \quad \pm(\varpi_0 + \varpi_i + \varpi_j), \quad \pm(\varpi_i + 2\varpi_0).$$

D'ailleurs la résolution de cette équation du 54e degré entraîne celle de l'équation primitive; autrement dit l'équation caractéristique est une *résolvante* de la 2e équation. Avant de montrer ce point, je conviendrai d'appeler racines *secondaires* les 54 quantités précédemment définies, en appelant par opposition racines *principales* les racines de l'équation caractéristique.

Il existe un certain nombre de systèmes formés de trois racines secondaires dont la somme est nulle. En posant

$$a_i = \varpi_i - \varpi_0, \quad b_i = \varpi_i + 2\varpi_0, \quad c_{ik} = -\varpi_0 - \varpi_i - \varpi_k,$$
$$a'_i = \varpi_0 - \varpi_i, \quad b'_i = -\varpi_i - 2\varpi_0, \quad c'_{ik} = \varpi_0 + \varpi_i + \varpi_k,$$

ces systèmes sont de la forme

$$a_i b_j c_{ij}, \quad c_{\lambda\mu} c_{\nu\rho} c_{\sigma\tau},$$
$$a'_i b'_j c'_{ij}, \quad c'_{\lambda\mu} c'_{\nu\rho} c'_{\sigma\tau},$$

où les indices $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ sont tous distincts. Je conviendrai de dire que deux racines secondaires *se rencontrent* lorsqu'elles se trouvent dans un même de ces systèmes. C'est ainsi que a_1 *rencontre* $b_2, b_3, \ldots, b_6, c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{16}$, et que c_{12} *rencontre* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_{34}, c_{35}, \ldots, c_{56}$.

On peut de même trouver des systèmes formés de 6 racines secondaires telles que deux quelconques d'entre elles ne se rencontrent pas; la recherche de tous ces systèmes ne présente aucune difficulté, et on trouve ainsi

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \end{array}$$

et tous les systèmes analogues obtenus en échangeant les indices ou en remplaçant les a_i, b_i, c_{ij} par a'_i, b'_j, c'_{ij}. Il est bien clair que toute substitution effectuée sur les racines secondaires et qui ne change pas leurs relations doit échanger entre eux ces différents systèmes, et par suite aussi les quantités qu'on obtient en faisant dans chacun d'eux le tiers de la somme des racines secondaires qu'il contient. Cette opération, effectuée sur les systèmes écrits plus haut, donne

$$-3\varpi_0, \quad +3\varpi_0, \quad \varpi_1 - \varpi_2, \quad \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3, \quad -\varpi_4 - \varpi_5 - \varpi_6$$

et on obtient par suite toutes les racines principales. A chaque substitution effectuée sur les racines secondaires correspond donc une substitution effectuée sur les racines principales.

Il résulte de là que les deux groupes G et G', le premier des racines principales, le second des racines secondaires, sont isomorphes et l'étude de l'un se ramène à celle de l'autre. En particulier l'équation caractéristique est une résolvante de l'équation qui donne les racines secondaires; il suffit de prendre la transformée dont l'une des racines est

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_6 + b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_6}{6}.$$

Les 54 racines secondaires se partagent en deux séries de 27; si en effet on part d'une racine secondaire quelconque, qu'on cherche toutes les racines qui

la rencontrent, puis toutes les racines qui rencontrent ces dernières, et ainsi de suite, on arrive, ou bien aux 27 racines a_i, b_j, c_{ij}, ou bien aux 27 racines a'_i, b'_i, c'_{ij}. Il est clair que toute substitution de G' effectuée sur les 54 racines secondaires échangera entre elles ces deux séries de 27 racines. Nous aurons donc un sous-groupe invariant d'indice 2 en prenant celles de ces substitutions qui ne déplacent aucune des deux séries (il est d'indice 2, car il y a des substitutions transposant effectivement les deux séries). Tout se ramène donc à l'étude de ce sous-groupe invariant, que nous appellerons G_1. *L'existence de ce sous-groupe invariant permet d'ailleurs, par la résolution d'une équation du 2e degré, de ramener la résolution de l'équation caractéristique à celle de l'équation qui donne les 27 racines secondaires* a_i, b_i, c_{ij}. A partir de maintenant je ne m'occuperai plus que de ces 27 racines secondaires.

Il est facile de constater dans le groupe G_1 l'existence des substitutions

$$\begin{aligned} S_{12} &= (a_1 a_2)\,(b_1 b_2)\,(c_{13} c_{23})(c_{14} c_{24})(c_{15} c_{25})(c_{16} c_{26}), \\ S_{123} &= (a_1 c_{23})(a_2 c_{31})(a_3 c_{12})\,(b_4 c_{56})\,(b_5 c_{64})\,(b_6 c_{45}), \\ T &= (a_1 b_1)\,(a_2 b_2)\,(a_3 b_3)\,(a_4 b_4)\,(a_5 b_5)\,(a_6 b_6) \end{aligned}$$

et de toutes celles qu'on en déduit en effectuant sur les indices une substitution quelconque. L'existence des substitutions S_{ij}, S_{ijk} montre que la racine a_1 par exemple peut être remplacée par n'importe quelle autre racine; que la racine a_1 étant fixée, la racine a_2, qui ne rencontre pas a_1, peut être remplacée par une quelconque des 15 autres racines qui ne rencontrent pas a_1; que les racines a_1, a_2 étant fixées, la racine a_3 qui ne rencontre ni a_1 ni a_2, peut être remplacée par une quelconque des 9 autres racines qui ne rencontrent ni a_1 ni a_2, et ainsi de suite; les racines a_1, a_2, a_3, a_4 étant fixées, la racine a_5 peut être remplacée par la racine a_6, la seule avec a_5 qui ne rencontre ni a_1 ni a_2 ni a_3 ni a_4. Comme deux racines qui ne se rencontrent pas ne peuvent jamais être remplacées que par deux racines qui ne se rencontrent pas, et que toute substitution de G_1 est complètement définie par les racines qu'elle fait succéder à $a_1, a_2, \ldots, a_6$, le groupe G_1 peut être engendré par les seules substitutions S_{ij}, S_{ijk} et son ordre est

$$27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2.$$

Au point de vue des racines principales, il est clair que le groupe G_1 permet de passer d'une racine principale, par exemple $-3\omega_0$, à toutes les autres; il suffit pour le voir de considérer, au lieu de ces racines, les systèmes de racines

secondaires qui leur donnent naissance. On voit alors immédiatement, qu'en appelant respectivement

$$u_{000},\ u'_{000},\ u_{ij},\ u_{ijk},\ u'_{ijk}$$

les systèmes qui fournissent les racines

$$3\varpi_0,\ -3\varpi_0,\ \varpi_i-\varpi_j,\ \varpi_i+\varpi_j+\varpi_k,\ -(\varpi_i+\varpi_j+\varpi_k),$$

la substitution T permet de passer de u'_{000} à u_{000}, S_{456} de u'_{000} à u_{123}, TS_{456} de u'_{000} à u'_{123}, $S_{234}S_{256}$ de u'_{000} à u_{12}. On peut donc avoir d'une 2e façon l'ordre du groupe G_1 en multipliant par 72 l'ordre du sous-groupe qui ne déplace pas une racine principale donnée, par exemple u'_{000}; ce sous-groupe échange alors entre elles les 6 quantités a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, et comme il peut les échanger d'une façon quelconque, son ordre est 6! Par suite l'ordre de G_1 est

$$72\times 6!,$$

nombre qui est bien égal au premier trouvé.

Le groupe G_1 admet un sous-groupe invariant d'indice 2, celui qui est formé des substitutions des racines principales qui résultent d'un nombre pair de transpositions. En effet la transposition des indices 1 et 2, par exemple, équivant à un nombre impair de transpositions des racines principales; il en est de même de la substitution T. Soit donc G_2 ce sous-groupe invariant d'ordre $27\times 16\times 10\times 6$. Ce groupe contient les substitutions

$$S_{12}S_{13}=(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3)(c_{12}c_{23}c_{31})(c_{14}c_{24}c_{34})(c_{15}c_{25}c_{35})(c_{16}c_{26}c_{36}),$$
$$S_{124}S_{12}S_{34}S_{124}=(a_1c_{13})(a_2c_{23})(a_3c_{12})(b_1b_2)(b_4c_{56})(b_5c_{64})(b_6c_{45})(c_{14}c_{24})(c_{15}c_{25})(c_{16}c_{26})$$

et toutes celles qu'on en déduit en y échangeant les indices d'une façon quelconque. Ces substitutions suffisent à définir le groupe G_2, car on voit facilement, comme tout à l'heure que le groupe qu'elles engendrent contient au moins

$$27\times 16\times 10\times 6$$

substitutions, par suite se confond avec G_2.

Chacune de ces substitutions laisse d'ailleurs invariante au moins une racine principale, par exemple $S_{12}S_{13}$ laisse invariante u_{000} et $S_{124}S_{12}S_{34}S_{124}$ laisse invariante u_{356}.

Le groupe G_2 échange entre eux les 36 couples de deux racines principales égales et de signes contraires, à savoir U_{000} formé de u_{000} et u'_{000}, $U_{ij}=U_{ji}$ formé de u_{ij} et u_{ji}, U_{ijk} formé de u_{ijk} et u'_{ijk}. Il existe toujours dans G_2 une substitution permettant de passer d'un quelconque de ces couples à un autre quelconque;

car il suffit de passer de u_{000} à une racine principale quelconque par une substitution de G_1, en effectuant au préalable, si cette substitution ne fait pas partie de G_2, la substitution T qui ne change pas U_{000}. Il y a plus. U_{000} étant fixé, on peut toujours passer d'une quelconque des quantités U_{ijk} à une autre de la même forme par une substitution paire des indices 1, 2, ..., 6, et de même d'une quantité U_{ij} à une autre de la même forme. Si on remarque que U_{000} et U_{ijk} sont alliés, tandis-que U_{000} et U_{ij} ne sont pas alliés, on soit que le groupe G_2 permet toujours de passer de deux couples U alliés à deux autres couples quelconques alliés, et de deux couples U non alliés à deux autres couples quelconques non alliés.

Cela étant je dis que G_2 est *simple*. En effet supposons d'abord que G_3 soit un sous-groupe invariant de G_2 contenant, outre la substitution identique, au moins une substitution ne déplaçant pas les 36 couples U; alors on peut toujours supposer que cette substitution ne déplace pas U_{000}, c'est-à-dire l'ensemble des deux systèmes

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6, \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6. \end{matrix}$$

Or le sous-groupe de G_2 qui laisse invariant l'ensemble de ces deux systèmes n'admet qu'un sous-groupe invariant, formé des substitutions paires des indices 1, 2, ..., 6, et ce sous-groupe est simple. Il en résulte que G_3 contient nécessairement toutes les substitutions qui laissent invariante la racine principale u_{000}, et par suite aussi toutes les substitutions qui laissent invariante une racine principale quelconque, et par suite aussi, d'après ce qui a été dit plus haut, toutes les substitutions de G_2.

Si donc G_2 n'était pas simple, il admettrait un sous-groupe invariant G_3 dont toutes les substitutions, à part la substitution identique, déplaceraient *toutes* les lettres U. Ces substitutions seraient donc toutes *régulières*; l'une d'entre elles par exemple serait formée de p cycles de q lettres, avec $pq = 36$, soit

$$\Sigma = (\alpha\beta\lambda \ldots .)(\ldots .) \ldots .$$

Or il existe toujours dans G_2 une substitution transposant deux lettres U quelconques et formée de 14 transpositions; on peut en effet toujours supposer que ces deux lettres, si elles sont alliées, sont U_{12} et U_{13}, et que, si elles ne sont pas alliées, elles sont U_{25} et U_{34}; dans les deux cas il suffit d'effectuer la substitution (23)(45) et de vérifier qu'elle revient à 14 transpositions des lettres U. Cela étant, effectuons sur Σ une des substitutions de G_2 équivalant à 14 transpositions,

et transposant les deux lettres α et β, on obtient la substitution

$$\Sigma' = (\beta\alpha\lambda' \ldots .) \ldots ,$$

qui appartient encore à G_3; le produit $\Sigma\Sigma'$, laissant invariante la lettre α, doit se réduire à la substitution identique; autrement dit, Σ' doit être l'inverse de Σ; mais pour cela il faut que la substitution effectuée sur Σ pour passer à Σ' déplace *au moins* $p(q-1)$ lettres; on a donc

$$p(q-1) = 36 - p \leqslant 28,$$

et par suite p, diviseur de 36, est égal à 9, 12 ou 18. Si p était égal à 9, la substitution Σ^2 nous ramènerait au cas de $p = 18$. Il suffit donc de démontrer l'impossibilité d'une substitution régulière de 12 cycles de 3 lettres, ou de 18 cycles de 2 lettres.

Prenons d'abord 12 cycles de 3 lettres, et supposons en premier lieu qu'un de ces cycles contienne deux lettres non alliées, qu'on peut toujours admettre être U_{000} et U_{12}; alors la 3e lettre du cycle n'est alliée ni à U_{000} ni à U_{12} et par suite peut toujours être supposée U_{34}; mais alors la substitution (12)(35) de G_2, effectuée sur Σ, donnerait une substitution Σ' telle que $\Sigma\Sigma'^{-1}$ ne déplacerait pas U_{000} et remplacerait U_{34} par U_{45}, ce qui est impossible. Il faut donc supposer que dans chacun des cycles les trois lettres sont alliées deux à deux. On peut supposer par exemple que l'un des cycles est

$$(U_{000}\, U_{123}\, \alpha),$$

et α est alors de la forme U_{124} ou U_{456}; la considération de la substitution (12)(45) exclut le premier cas et il ne reste que l'hypothèse

$$(U_{000}\, U_{123}\, U_{456});$$

cherchons alors le cycle qui contient U_{12}; la lettre qui succède à U_{12} est alliée à U_{12}, mais non à U_{000}, U_{123}, U_{456}; elle est donc U_{13} ou U_{23}; il en est de même de la 3e lettre du cycle; si alors ce cycle est $(U_{12}\, U_{13}\, U_{23})$, il suffit d'effectuer la substitution (23)(45) pour arriver à une impossibilité.

Prenons ensuite une substitution de 18 cycles de 2 lettres. D'abord si l'un de ces cycles contient deux lettres alliées, on peut supposer que c'est $(U_{000}\, U_{123})$. Le cycle qui contient U_{12} contient alors en outre une lettre qui n'est alliée ni à U_{000} ni à U_{123} et par suite est de la forme U_{13} ou U_{45}; la substitution (12)(46) exclut chacun de ces cas. Il faut donc supposer que chaque cycle contient deux lettres non alliées; l'un sera par exemple $(U_{000}\, U_{12})$; alors si U_{13} est remplacé par α, α est

allié à U_{000}, mais ne l'est ni à U_{12} ni à U_{13}, par suite c'est U_{123} ou U_{456}; mais la substitution (12)(45) montre que c'est impossible.

En définitive le groupe G_2 ne contient pas de sous-groupe invariant formé de substitutions déplaçant toutes les lettres U, et par suite il est *simple.*

Le groupe G_1, *qui n'admet que le sous-groupe invariant simple* G_2, *est isomorphe au groupe des* 27 *droites d'une surface du* 3e *degré.* On sait en effet qu'on peut désigner les 27 droites d'une telle surface au moyen des lettres a_i, b_i, c_{ij}, la droite a_1 rencontrant $b_2, \ldots, b_6$, $c_{12}, \ldots, c_{16}$; la droite b_1 rencontrant $a_2, a_3, \ldots, a_6, c_{12}, \ldots, c_{16}$, et la droite c_{12} rencontrant $a_1, a_2, b_1, b_2, c_{34}, c_{35}, \ldots, c_{56}$; ce groupe peut de plus être engendré au moyen des substitutions telles que S_{12} et S_{123}; par suite il se confond avec G_1. Le groupe des 27 droites d'une surface du 3e degré a été étudié par M. Jordan,* qui a montré directement qu'il ne contenait qu'un sous-groupe invariant simple. Il a montré de plus que ce groupe ne pouvait conduire à aucune résolvante de degré inférieur à 27.

Il résulte de tout cela que *la résolution de l'équation caractéristique d'un groupe simple de rang* 6 *et du type* E) *se ramène à celle d'une équation du second degré et à celle d'une équation du* 27e *degré dont le groupe de substitutions est le même que celui de l'équation qui donne les* 27 *droites d'une surface du* 3e *degré; ce groupe admet un seul sous-groupe invariant d'indice* 2, *qui est simple.*

8°. *Type* E), $l = 7$. Les racines sont ici

$$\varpi_i - \varpi_j, \quad \pm(\varpi_i + 2\varpi_0), \quad \pm(\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k), \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 7)$$

avec

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_7 + 2\varpi_0 = 0.$$

L'équation qui donne ces 126 racines peut être ramenée d'abord à une équation du 56e degré, en procédant de la même façon que dans le cas précédent. Il existe en effet des systèmes de 27 racines tels que si une racine quelconque d'un de ces systèmes est la somme de deux autres racines, l'une au moins de ces deux racines fait partie du même système. Cherchons tous ces systèmes.

On peut remarquer d'abord qu'un tel système contient nécessairement une racine de la forme $\varpi_i - \varpi_j$; sinon l'existence dans ce système de $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ entraînerait celle de toutes les racines $\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k$ en nombre égal à 35, et l'existence de $\varpi_1 + 2\varpi_0$ entraînerait celle de $\varpi_i + 2\varpi_0$, $-\varpi_i - \varpi_j - \varpi_k$.

Supposons d'abord qu'il y ait deux racines telles que $\varpi_1 - \varpi_3$ et $\varpi_2 - \varpi_4$,

---

* Jordan, *Traité des substitutions*, p. 316–329.

c'est-à-dire deux racines $\varpi_i - \varpi_j$ pour lesquelles les quatre indices sont tous distincts. L'existence de ces deux racines entraîne celle de

$$\begin{array}{rcl}
\varpi_2 - \varpi_3 & \text{ou} & \varpi_1 - \varpi_2, \\
\varpi_2 - \varpi_3 & \text{ou} & \varpi_3 - \varpi_4, \\
\varpi_1 - \varpi_4 & \text{ou} & \varpi_4 - \varpi_3, \\
\varpi_1 - \varpi_4 & \text{ou} & \varpi_2 - \varpi_1, \\
\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i & \text{ou} & -\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_i, \\
\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i & \text{ou} & -\varpi_1 - \varpi_4 - \varpi_i, \\
-\varpi_3 - \varpi_4 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_1 + \varpi_4 + \varpi_i, \\
-\varpi_3 - \varpi_4 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_i,
\end{array}$$

puis celle de

$$\begin{array}{rcl}
\varpi_1 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_i - \varpi_3, \\
\varpi_2 - \varpi_i & \text{ou} & \varpi_i - \varpi_4, \\
\varpi_1 + 2\varpi_0 & \text{ou} & -\varpi_3 - 2\varpi_0, \\
\varpi_2 + 2\varpi_0 & \text{ou} & -\varpi_4 - 2\varpi_0, \\
\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_4 & \text{ou} & -\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_4, \\
\varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j & \text{ou} & -\varpi_3 - \varpi_i - \varpi_j, \\
\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 & \text{ou} & -\varpi_1 - \varpi_3 - \varpi_4, \\
\varpi_2 + \varpi_i + \varpi_j & \text{ou} & -\varpi_4 - \varpi_i - \varpi_j,
\end{array}$$

où les indices i et j peuvent prendre les valeurs 5, 6, 7. On a ainsi 32 couples de racines, dans chacun desquels il faut prendre au moins une racine. Mais 16 de ces couples ont deux à deux une racine commune, ce sont les 16 premiers; il en résulte que le système cherché contiendra au moins 26 des racines déjà écrites. Etant donnés deux des couples qui ont une racine commune, le système ne peut contenir une racine d'un de ces couples différente de la racine commune. L'existence en effet de $\varpi_1 - \varpi_2$ (1r couple) entraînerait celle de $\varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_i$ ou de $-\varpi_2 - \varpi_3 - \varpi_i$, ce qui donnerait certainement plus de 27 racines; de même l'existence de $\varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_5$ entraînerait celle de $\varpi_2 - \varpi_1$ ou $\varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_5$, ce qui est aussi impossible.

Il résulte de là que le système contient nécessairement

$$\varpi_1 - \varpi_3,\ \varpi_1 - \varpi_4,\ \varpi_2 - \varpi_3,\ \varpi_2 - \varpi_4,\ \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_i,\ -\varpi_3 - \varpi_4 - \varpi_i$$

et ne contient pas

$$\pm(\varpi_1 - \varpi_2),\ \pm(\varpi_3 - \varpi_4),\ \pm(\varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_i),\ \pm(\varpi_1 + \varpi_4 + \varpi_i),$$
$$\pm(\varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_i),\ \pm(\varpi_2 + \varpi_4 + \varpi_i).$$

Jusqu'ici rien ne distingue, au signe près, les indices 1 et 2 des indices 3 et 4. Aussi pouvons-nous supposer, en considérant le dernier couple écrit tout à l'heure, que le système contient la racine $-\varpi_4-\varpi_5-\varpi_6$; il en résulte l'existence de

$$\varpi_1-\varpi_5,\ \varpi_1-\varpi_6,\ \varpi_2-\varpi_5,\ \varpi_2-\varpi_6$$

et par suite l'exclusion de toutes les racines

$$\pm(\varpi_1+\varpi_i+\varpi_j),\ \pm(\varpi_2+\varpi_i+\varpi_j),\qquad (i, j=3, 4, 5, 6, 7).$$

Par suite le système contient toutes les racines

$$-\varpi_3-\varpi_i-\varpi_j,\ -\varpi_4-\varpi_i-\varpi_j,$$

puis $\varpi_1+\varpi\ +\varpi_4$, $\varpi_1-\varpi_7$, $\varpi_2-\varpi_7$. Le système contient en outre $\varpi_1+2\varpi_0$, sinon il contiendrait toutes les racines $-\varpi_i-2\varpi_0$, ce qui donnerait plus de 27 racines; de même il contient $\varpi_2+2\varpi_0$. Enfin le système ne contient pas $\varpi_7-\varpi_4$ et par suite l'existence de $-\varpi_4-\varpi_5-\varpi_6$ entraîne celle de $-\varpi_5-\varpi_6-\varpi_7$.

Nous sommes finalement arrivés aux 27 racines

$$\varpi_1-\varpi_i,\ \varpi_2-\varpi_i,\ \varpi_1+2\varpi_0,\ \varpi_2+2\varpi_0,\ \varpi_1+\varpi_2+\varpi_i,\ -\varpi_i-\varpi_j-\varpi_k,\qquad (1)$$

où les indices i, j, k prennent les valeurs $3, 4, \ldots, 7$. Ces 27 racines forment bien d'ailleurs un système jouissant des propriétés voulues. En changeant les signes, nous avons un nouveau système

$$\varpi_i-\varpi_1,\ \varpi_i-\varpi_2,\ -\varpi_1-2\varpi_0,\ -\varpi_2-2\varpi_0,\ -\varpi_1-\varpi_2-\varpi_i,\ \varpi_i+\varpi_j+\varpi_k.\qquad (2)$$

La première hypothèse faite se trouve ainsi épuisée. Il ne reste plus qu'à supposer que si deux racines $\varpi_i-\varpi_j$ existent dans un même système, elles ont au moins un indice commun. Or l'existence de $\varpi_1-\varpi_2$ entraîne celle de $\varpi_1-\varpi_i$ ou $\varpi_i-\varpi_2$. On peut donc toujours supposer, au signe près, que le système cherché contient les 6 racines $\varpi_1-\varpi_2$, $\varpi_1-\varpi_3, \ldots, \varpi_1-\varpi_7$ et alors il n'en contient pas d'autre de la forme $\varpi_i-\varpi_j$. Le système ne peut pas contenir de racine telle que $-\varpi_2-\varpi_3-\varpi_4$, sinon en effet il contiendrait toutes les racines $-\varpi_i-\varpi_j-\varpi_k$, où i, j, k sont différents de 1, ce qui donne déjà 26 racines; puis comme

$$\begin{aligned}(-\varpi_2-\varpi_3-\varpi_4)&=(\varpi_5+2\varpi_0)+(\varpi_1+\varpi_6+\varpi_7)\\&=(\varpi_6+2\varpi_0)+(\varpi_1+\varpi_5+\varpi_7),\end{aligned}$$

il faudrait y ajouter encore au moins deux autres racines, ce que nous excluons. Donc le système ne contient pas de racine $\varpi_i-\varpi_j-\varpi_k$, par suite il

contient toutes les racines $\varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j$, puis en vertu de

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 = (-\varpi_4 - 2\varpi_0) + (-\varpi_5 - \varpi_6 - \varpi_7),$$

il contient les 6 racines $-\varpi_i - 2\varpi_0$, ce qui nous conduit aux 27 racines

$$\varpi_1 - \varpi_i, \quad -\varpi_i - 2\varpi_0, \quad \varpi_1 + \varpi_i + \varpi_j. \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, 7). \tag{3}$$

Enfin en changeant les signes, on a un 4e système

$$\varpi_i - \varpi_1, \quad \varpi_i + 2\varpi_0, \quad -\varpi_1 - \varpi_i - \varpi_j. \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, 7). \tag{4}$$

Les systèmes (1), (2), (3) et (4) et ceux qu'on en déduit en échangeant les indices d'une façon quelconque, sont au nombre de 56; ils sont évidemment échangés entre eux par toute substitution du groupe G des 126 racines de l'équation caractéristique. Il en résulte que cette équation admet une résolvante du 56e degré. On peut prendre pour racines de cette résolvante les quantités qu'on obtient en faisant, dans chacun des 56 systèmes trouvés, la 18e partie de la somme des racines qu'il contient. Or en faisant cette opération pour les systèmes (1), (2), (3), (4), on trouve

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_0, \quad -\varpi_1 - \varpi_2 - \varpi_0, \quad \varpi_1 - \varpi_0, \quad \varpi_0 - \varpi_1.$$

L'équation caractéristique admet donc une résolvante du 56e *degré dont les racines sont*

$$\pm(\varpi_i - \varpi_0), \quad \pm(\varpi_0 + \varpi_i + \varpi_j). \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 7).$$

Réciproquement d'ailleurs l'équation caractéristique est une résolvante de cette dernière équation. Posons pour abréger

$$a_i = \varpi_i - \varpi_0, \quad b_i = \varpi_0 - \varpi_i, \quad a_{ij} = -\varpi_0 - \varpi_i - \varpi_j, \quad b_{ij} = \varpi_0 + \varpi_i + \varpi_j.$$

Il existe des systèmes de quatre racines *secondaires* pour lesquels la somme de ces 4 racines est nulle. Ces systèmes sont d'une des formes suivantes

$$\begin{array}{ll} a_1 b_2 \; a_{13} b_{23}, & a_{12} a_{34} b_{13} b_{24}, \\ a_1 b_{23} b_{45} b_{67}; & b_1 \; a_{23} a_{45} a_{67}. \end{array}$$

En convenant de dire que deux racines secondaires *se rencontrent* lorsqu'elles se trouvent dans un même de ces systèmes, on voit que le groupe G′ des 56 racines secondaires ne peut qu'échanger entre eux les différents couples de racines qui se rencontrent, et aussi les différents couples de racines qui ne se rencontrent pas. Or ces derniers sont de l'une des formes

$$x_1 x_2, \; x_1 x_{23}, \; x_1 y_{12}, \; y_1 y_2, \; y_1 y_{23}, \; y_1 x_{12}, \; x_{12} x_{13}, \; x_{12} y_{34}, \; y_{12} y_{13}.$$

Par suite le groupe G′ échangera entre elles les diverses quantités qu'on obtient en faisant les différences des racines secondaires de chacun de ces couples. Or ces quantités ne sont autres que les 126 racines principales.

Il résulte de là que les deux groupes G et G′ sont isomorphes holoédriques; on peut établir une correspondance univoque entre les substitutions de l'un et ceux de l'autre. L'étude de G se ramène donc à celle de G′. Il est d'ailleurs facile de trouver l'équation caractéristique comme résolvante de l'équation qui donne les 56 racines secondaires. Considérons en effet tous les systèmes de 27 racines principales précédemment considérés qui contiennent une racine principale donnée, par exemple $\varpi_1 - \varpi_2$; les racines secondaires qui correspondent à ces systèmes sont au nombre de 12, à savoir

$$\varpi_1 - \varpi_0,\ \varpi_0 - \varpi_2,\ \varpi_0 + \varpi_1 + \varpi_i,\ -\varpi_0 - \varpi_2 - \varpi_i$$

et la somme de ces 12 racines est précisément $6(\varpi_1 - \varpi_2)$. Il en serait de même pour les autres racines principales. Elles fournissent 126 systèmes de 12 racines secondaires qui sont évidemment échangés entre eux par le groupe G′ et qui donnent comme résolvante l'équation caractéristique.

Cela étant nous pouvons nous borner à l'étude du groupe G′ des 56 racines secondaires.

On aperçoit immédiatement l'existence dans ce groupe d'un sous-groupe invariant d'ordre 2 formé de la substitution identique et de la substitution

$$(a_i\, b_i)(a_{ik}\, b_{ik});$$

cette dernière correspond, dans le groupe G, à la substitution qui transpose toutes les racines principales égales et de signes contraires, et qui, étant formée de 63 transpositions, est une substitution *impaire*.

On aperçoit immédiatement aussi l'existence d'un second sous-groupe invariant G'_1 formé de celles des substitutions de G' qui correspondent à des substitutions *paires* de G. Ce second sous-groupe invariant n'a aucune substitution commune avec le précédent: son ordre est de plus la moitié de l'ordre de G′. Il peut aussi être regardé comme un groupe *isomorphe* à G′, le sous-groupe invariant d'ordre 2 correspondant à sa substitution identique. A ce point de vue le groupe G'_1, indique comment le groupe G′ échange entre eux les 28 couples de deux racines secondaires égales et de signes contraires. En appelant c_i l'ensemble des racines a_i et b_i, et c_{ik} l'ensemble des racines a_{ik} et b_{ik}, toute substitution de G′ donne une substitution des 28 lettres c_i et c_{ik}, et cette substitution des 28 lettres

c_i, c_{ik} peut être fournie par deux substitutions de G' dont une et une seule appartient à G'_1; si on appelle Γ le groupe qui indique comment G' échange c_i, c_{ik}, il y a isomorphisme holoédrique entre Γ et G'_1.

Il est facile de vérifier que le groupe total G' contient les substitutions

$$S_{12} = \begin{cases} (a_1a_2)(a_{13}a_{23})(a_{14}a_{24})(a_{15}a_{25})(a_{16}a_{26})(a_{17}a_{27}) \\ (b_1b_2)(b_{13}b_{23})(b_{14}b_{24})(b_{15}b_{25})(b_{16}b_{26})(b_{17}b_{27}), \end{cases}$$

et

$$S_{123} = \begin{cases} (a_1a_{23})(a_2a_{31})(a_3a_{12})(a_{45}b_{67})(a_{46}b_{57})(a_{47}b_{56}) \\ (b_1b_{23})(b_2b_{31})(b_3b_{12})(b_{45}a_{67})(b_{46}a_{57})(b_{47}a_{56}), \end{cases}$$

et celles qu'on en déduit en y changeant les indices d'une manière quelconque. La forme de ces substitutions montre que la racine a_7 peut être remplacée par n'importe quelle autre des 56 racines secondaires. Cette racine a_7 étant fixée, la racine a_1 par exemple peut être remplacée par a_i, a_{ij}, b_{7i}, où les indices i et j prennent les valeurs 1, 2, ..., 6; ce sont précisément les racines qui *ne rencontrent pas* a_7; d'ailleurs a_1 *qui ne rencontre pas* a_7, ne peut être remplacée manifestement que par une racine ne rencontrant pas a_7. Or en remplaçant dans les 27 racines a_i, a_i, b_{7i}, la quantité ϖ_7 par ϖ_0, ce qui revient à annuler a_7, ces racines prennent la forme

$$\varpi_i - \varpi_0, \quad -\varpi_0 - \varpi_i - \varpi_j, \quad \varpi_i + 2\varpi_0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 6),$$

avec $\varpi_1 + \ldots + \varpi_6 + 3\varpi_0 = 0$.

Or on obtient ainsi les 27 racines secondaires étudiées dans le numéro précédent, et toute substitution du groupe de ces racines donnera évidemment une substitution de G' ne déplaçant pas x_7. Or le groupe de ces 27 quantités est d'ordre

$$27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2;$$

comme toute substitution de G' est définie par les racines qui remplacent $a_1, a_2, \ldots, a_7$, l'ordre de G' est donc

$$56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2.$$

Le groupe Γ contient les substitutions

$$\Sigma_{12} = (c_1c_2)(c_{13}c_{23})(c_{14}c_{24})(c_{15}c_{25})(c_{16}c_{26})(c_{17}c_{27}),$$
$$\Sigma_{123} = (c_1c_{23})(c_2c_{31})(c_3c_{12})(c_{45}c_{67})(c_{46}c_{57})(c_{47}c_{56}).$$

Je dis que Γ *est simple.* Remarquons d'abord que, d'après ce qui vient d'être dit pour G', il permet de remplacer *deux* lettres quelconques par deux autres lettres quelconques (puisque, c_7 étant fixée, c_1 peut être remplacée par c_i, c_{ij}, c_{1i}).

De plus il existe toujours dans Γ une substitution transposant deux quelconques des lettres c, par exemple c_1 et c_2, et formée de 6 transpositions, par exemple Σ_{12}.

Cela étant je dis d'abord que Γ ne peut pas contenir de sous-groupe invariant dont toutes les substitutions, à part la substitution identique, déplacent *toutes* les 28 lettres c. En faisant un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas de $l=6$, on verrait en effet que toutes les substitutions de ce groupe contiendraient au moins 16 cycles, ce qui est impossible.

Il résulte de là que tout sous-groupe invariant de Γ contient au moins une substitution laissant invariante une lettre c; on peut même toujours supposer que c'est c_7. Or le sous-groupe de Γ qui laisse invariant c_7 est celui dont nous parlions tout à l'heure qui échange entre elles les 27 lettres c autres que c_7, ou encore les 27 quantités

$$\varpi_i - \varpi_0, \quad \varpi_i + 2\varpi_0, \quad -\varpi_0 - \varpi_i - \varpi_j.$$

Or ce groupe n'admet qu'un sous-groupe invariant qui est engendré, en revenant à nos notations, par les substitutions

$$\begin{aligned} T_{123} &= (c_1c_2c_3)(c_{12}c_{23}c_{31})(c_{14}c_{24}c_{34}) \ldots\ldots (c_{17}c_{27}c_{37}), \\ U_{123} &= (c_1c_{23})(c_2c_{12})(c_3c_{13})(c_{24}c_{34}) \ldots\ldots (c_{27}c_{37})(c_{45}c_{67})(c_{46}c_{57})(c_{47}c_{56}). \end{aligned}$$

Tout sous-groupe invariant de Γ contiendra donc les substitutions T_{123}, U_{123} et celles qu'on en déduit en y échangeant d'une façon quelconque les indices. Je dis que le groupe engendré par ces substitutions se confond avec Γ. Pour cela prenons les substitutions correspondantes de G_1'; il est facile de vérifier que ce sont les substitutions

$$T'_{123} = \begin{cases} (a_1a_2a_3)(a_{12}a_{23}a_{31})(a_{14}a_{24}a_{34}) \ldots\ldots (a_{17}a_{27}a_{37}) \\ (b_1b_2b_3)(b_{12}b_{23}b_{31})(b_{14}b_{24}b_{34}) \ldots\ldots (b_{17}b_{27}b_{37}), \end{cases}$$

et

$$U'_{123} = \begin{cases} (a_1a_{23})(a_2a_{12})(a_3a_{13})(a_{45}b_{67})(a_{46}b_{57})(a_{47}b_{56})(a_{24}a_{34}) \ldots\ldots (a_{27}a_{37}) \\ (b_1b_{23})(b_2b_{12})(b_3b_{13})(b_{45}a_{67})(b_{46}a_{57})(b_{47}a_{56})(b_{24}b_{34}) \ldots\ldots (b_{27}b_{37}), \end{cases}$$

qui coïncident respectivement avec $S_{12}S_{13}$ et $S_{234}S_{23}S_{14}S_{234}$, et qui correspondent à des substitutions paires de G'. Or en employant le procédé qui nous a déjà servi, on voit que le groupe engendré par ces substitutions est d'ordre

$$56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6,$$

c'est-à-dire est de l'ordre de G_1' ou de Γ. Il en résulte bien manifestement que Γ est simple.

Ce groupe Γ *est isomorphe au groupe des* 28 *tangentes doubles d'une courbe plane du* 4e *ordre.* On peut remarquer en effet que le groupe des 28 tangentes doubles est transitif et que celles de ses substitutions qui ne déplacent pas une tangente double donnée échangent les 27 autres suivant un groupe isomorphe au groupe des 27 droites d'une surface du 3e degré; or c'est précisément ce qui a lieu pour notre groupe Γ. D'ailleurs la vérification se fera directement lorsque nous aurons étudié l'équation caractéristique des groupes de rang 8, type E). On peut remarquer que les systèmes mentionnés plus haut de quatre racines secondaires dont la somme est nulle, donnent, dans les c, des systèmes de quatre lettres échangés entre eux par le groupe Γ; ils sont de la forme

$$c_1c_2c_{13}c_{23}, \quad c_{12}c_{13}c_{24}c_{34}, \quad c_1c_{23}c_{45}c_{67}.$$

Ils sont au nombre de 315 et correspondent aux 315 systèmes formés de quatre tangentes doubles dont les huit points de contact sont sur une même conique. De même les 63 couples de racines principales correspondent aux 63 familles de coniques quatre fois tangentes à la courbe du quatrième ordre, ou plutôt aux 63 systèmes de six coniques formées chacune de deux tangentes doubles qui appartiennent à ces 63 familles.

En résumé *la résolution de l'équation caractéristique d'un groupe simple du type* E) *et de rang* 7 *se ramène à la résolution d'une équation du second degré et à celle d'une équation du* 28e *degré dont le groupe est isomorphe à celui de l'équation qui donne les* 28 *tangentes doubles d'une courbe plane du* 4e *ordre, et ce groupe est simple. Les deux équations à résoudre sont indépendantes l'une de l'autre.*

9°. *Type* E), $l = 8$. Les racines sont ici

$$\varpi_i - \varpi_j, \quad \pm(\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k), \qquad (i \neq j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, 9),$$

avec $\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_9 = 0$.

Nous poserons pour abréger

$$a_{ij} = \varpi_i - \varpi_j, \quad a_{ijk} = \varpi_i + \varpi_j + \varpi_k, \quad b_{ijk} = -\varpi_i - \varpi - \varpi_k.$$

Le groupe G de ces 240 racines contient des substitutions impaires; par exemple celle qu'on obtient en échangeant entre eux les indices 1 et 2 équivaut à 57 transpositions. Il en résulte que *le groupe* G *contient un sous-groupe invariant* G_1 *d'indice* 2 *formé des substitutions paires de* G.

Le groupe G admet un autre sous-groupe invariant d'ordre 2, formé de la substitution identique et de la substitution

$$(a_{ik}\, a_{ki})(a_{ijk}\, b_{ijk}) \tag{1}$$

qui transpose les racines égales et de signes contraires. Ce sous-groupe invariant est contenu dans le précédent G_1, puisque la substitution (1) équivaut à 120 transpositions. Il détermine donc un groupe Γ isomorphe à G_1, d'ordre moitié moindre et indiquant par exemple comment G_1 échange les couples de racines égales et de signes contraires.

On peut remarquer qu'étant donnée la racine $\varpi_1 - \varpi_2$, il en existe 56 autres alliées à cette racine ; qu'étant données les deux racines alliées $\varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_1 - \varpi_3$, il existe 27 racines alliées à celles-là ; qu'étant données les trois racines alliées $\varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_1 - \varpi_3$, $\varpi_1 - \varpi_4$, il existe 16 autres racines qui leur sont alliées ; qu'étant données les quatre racines alliées deux à deux $\varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_1 - \varpi_3$, $\varpi_1 - \varpi_4$, $\varpi_1 - \varpi_5$, il existe 10 autres racines qui leur sont alliées ; qu'étant données les cinq racines alliées deux à deux $\varpi_1 - \varpi_2, \ldots, \varpi_1 - \varpi_6$, il existe 6 autres racines qui leur sont alliées ; enfin qu'étant données les six racines alliées deux à deux $\varpi_1 - \varpi_2, \ldots, \varpi_1 - \varpi_7$, il existe 3 autres racines qui leur sont alliées, à savoir

$$\varpi_1 - \varpi_8,\ \varpi_1 - \varpi_9,\ \varpi_1 + \varpi_8 + \varpi_9,$$

mais parmi ces trois racines, les deux premières se séparent de la dernière en ce sens qu'elles sont alliées entre elles.

Comme toute substitution de G ne peut remplacer deux racines alliées que par deux autres racines alliées, et que toute substitution est définie par les racines qu'elle fait succéder à $\varpi_1 - \varpi_2, \ldots, \varpi_1 - \varpi_9$, on voit que le groupe G est d'ordre *au plus* égal à

$$240 \times 56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2.$$

Par suite l'ordre du groupe Γ est *au plus* égal à

$$120 \times 56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6.$$

Or il est facile de voir qu'en appelant $c_{ik} = c_{ki}$ l'ensemble des deux racines a_{ik}, a_{ki}, et c_{ijk} l'ensemble des racines a_{ijk}, b_{ijk}, le groupe Γ contient la substitution

$$S_{123} = (c_{12}\, c_{23}\, c_{31})(c_{1i}\, c_{2i}\, c_{3i})(c_{12i}\, c_{23i}\, c_{31i})(c_{1ij}\, c_{2ij}\, c_{3i}). \qquad (i, j = 4, \ldots, 9). \tag{2}$$

Remarquons maintenant que le groupe G contient la substitution suivante, comme il est très facile de le vérifier,

$$\begin{cases}(a_{14}a_{23i})(a_{12}a_{34i})(a_{13}a_{24i})(a_{156}b_{789})\ldots\ldots(a_{189}b_{567})\\(a_{4i}b_{23i})(a_{2}\ b_{34i})(a_{3i}b_{24i})(b_{156}a_{789})\ldots\ldots(b_{189}b_{567})\end{cases}(a_{234}b_{234}),$$

où l'indice i prend les valeurs 1, 5, 6, 7, 8, 9. Si on transforme au moyen de cette substitution la substitution de G_1 qu'on obtient en effectuant les deux transpositions d'indices (14)(23), on obtient une nouvelle substitution de G_1 qui donne dans Γ la substitution suivante

$$T_{123}=(c_{12}c_{13})(c_{123}c_{23})(c_{12i}c_{3i})(c_{13i}c_{2i})(c_{1i}c_{23i})(c_{2ij}c_{3ij})(c_{\lambda\mu\nu}c_{\rho\sigma\tau}), \tag{3}$$

où les indices i, j prennent toutes les valeurs 4, 5, ..., 9, et où $\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau$ désigne successivement toutes les permutations des six indices 4, 5, ..., 9.

Or si on considère le groupe engendré par les substitutions S_{ijk}, T_{ijk} analogues à (2) et (3), on constate, par un procédé déjà employé, que son ordre est *au moins* égal à

$$120\times 56\times 27\times 16\times 10\times 6.$$

Comme il est contenu dans le groupe Γ et que l'ordre du groupe Γ est au plus égal au nombre que nous venons de trouver, il en résulte que l'ordre de Γ est $120\times 56\times 27\times 16\times 10\times 6$, et qu'il peut être défini au moyen des seules substitutions S_{ijk} et T_{ijk}.

Je dis que Γ est *simple*. D'abord c'est un groupe transitif et les substitutions de ce groupe qui laissent invariante une lettre donnée, par exemple c_{89}, échangent entre elles les 56 lettres *alliées* à c_{89} ; la façon dont ces lettres sont échangées déterminant complètement la substitution correspondante (puisque parmi ces 56 lettres se trouvent $c_{19}, c_{29}, \ldots\ldots, c_{79}$), ces substitutions sont au nombre de

$$56\times 27\times 16\times 10\times 6.$$

Or, en posant

$$c_{18}=\alpha_i,\quad c_{19}=\beta_i,\quad c_{ij8}=\alpha_{ij},\quad c_{ij9}=\beta_{ij},$$

le sous-groupe de Γ qui laisse invariant c_{89} contient les substitutions telles que

$$S_{123}=\begin{cases}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31})(\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34})\ \ldots\ldots(\alpha_{17}\alpha_{27}\alpha_{37})\\(\beta_1\beta_2\beta_3)(\beta_{12}\beta_{23}\beta_{31})(\beta_{14}\beta_{24}\beta_{34})\ldots\ldots(\beta_{17}\beta_{27}\beta_{37}),\end{cases}$$

et

$$T_{123}=\begin{cases}(\alpha_1\alpha_{23})(\alpha_2\alpha_{12})(\alpha_3\alpha_{13})(\alpha_{24}\alpha_{34})\ \ldots\ldots(\alpha_{27}\alpha_{37})(\alpha_{45}\beta_{67})(\alpha_{46}\beta_{57})(\alpha_{47}\beta_{56})\\(\beta_1\beta_{23})(\beta_2\beta_{12})(\beta_3\beta_{13})(\beta_{24}\beta_{34})\ \ldots\ldots(\beta_{27}\beta_{37})(\beta_{45}\alpha_{67})(\beta_{46}\alpha_{57})(\beta_{47}\alpha_{56}).\end{cases}$$

Or nous avons rencontré ces substitutions à la fin du paragraphe précédent et vu qu'elles engendrent un groupe *simple* d'ordre précisément égal à

$$56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6.$$

Il en résulte donc que *le sous-groupe de* Γ *qui laisse invariante une lettre donnée est simple.*

Cela étant supposons d'abord qu'un sous-groupe invariant de Γ contienne au moins une substitution ne déplaçant pas toutes les lettres, par exemple ne déplaçant pas c_{89} ; alors il devra contenir, d'après ce qui vient d'être dit, toutes les substitutions qui ne déplacent pas c_{89}, et par suite aussi toutes les substitutions ne déplaçant pas une lettre quelconque, mais comme les substitutions S_{ijk}, T_{ijk} qui servent à définir Γ, ne déplacent pas toutes les lettres, elles doivent aussi faire partie du sous-groupe invariant, qui coïncide par suite avec Γ.

Pour démontrer que le groupe Γ est simple, il suffit donc de démontrer qu'il ne contient pas de sous-groupe invariant dont toutes les substitutions, sauf la substitution identique, déplacent toutes les lettres. Or remarquons que deux lettres quelconques alliées peuvent toujours être remplacées par deux lettres alliées données, par exemple c_{12} et c_{13}, et que deux lettres quelconques non alliées peuvent toujours de même être remplacées par exemple par c_{23} et c_{123} ; la substitution T_{123} montre alors qu'il existe toujours dans Γ une substitution transposant deux lettres quelconques données et formée de 45 transpositions.

Cela étant on voit, comme dans le cas de $l = 6$, que si Γ contient un sous-groupe invariant, toutes les substitutions de ce sous-groupe doivent être régulières et se composer soit de 30 cycles de 4 lettres, soit de 40 cycles de 3 lettres, soit de 60 transpositions. Il suffit de démontrer l'impossibilité des deux dernières hypothèses.

Prenons d'abord le cas de 40 cycles de 3 lettres. Si un de ces cycles contient deux lettres alliées, la troisième sera manifestement alliée aux deux premières, et comme on peut toujours ramener, au moyen d'une substitution de Γ, trois lettres alliées à être c_{12}, c_{13}, c_{14}, on aurait le cycle $(c_{12}\, c_{13}\, c_{14})$; mais alors la substitution (23)(45) de Γ montre, comme dans le cas de $l = 6$, que c'est impossible. Il faut donc que tous les cycles ne contiennent que des lettres non alliées ; l'un contiendra par exemple $c_{12}\, c_{34}$, la troisième lettre étant alors nécessairement de l'une des formes c_{56}, c_{135}, c_{567} ; mais dans tous les cas la substitution (13)(24)(57)(68) montre que c'est impossible.

Il ne reste donc que le cas de 60 cycles de 2 lettres. Si l'un de ces cycles contient deux lettres alliées, par exemple $(c_{12}\, c_{13})$, le cycle qui contient c_{23} contiendra en outre une lettre alliée à c_{12} et c_{13}, et par suite sera de la forme c_{14}, c_{145}, c_{234}; mais la substitution (23)(46) exclut tous ces cas. Si au contraire l'un des cycles contient deux lettres non alliées, par exemple $(c_{12}\, c_{34})$, le cycle qui contient c_{123} contiendra en outre une lettre alliée à c_{12}, mais non à c_{34} ni à c_{123}, par suite de la forme c_{156}; mais la substitution (12)(56) montre que c'est impossible.

Finalement le groupe Γ n'admet pas de sous-groupe invariant; il est *simple*. Les indices de composition de G sont par suite 2, 2 et l'ordre de Γ.

La résolution de l'équation caractéristique d'un groupe de transformations simple du type E) *et de rang* 8 *se ramène à celle de deux équations du second degré et d'une équation de degré* 120 *à groupe de substitutions simples d'ordre* 120 . 56 . 27 . 16 . 10 . 6.

Le groupe simple Γ ou plutôt le groupe Γ' d'ordre double qui indique comment le groupe G échange les 120 lettres c, est un des groupes désignés par M. Jordan sous le nom de *premiers groupes hypoabéliens* h_0 ou de *seconds groupes de Steiner*.* Considérons les $R_4 \doteq 2^7 - 2^3 = 120$ lettres représentées par le symbole général $(a, b, c, d;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ où l'on assigne aux indices $a, b, \ldots, \delta$ tous les systèmes de valeurs (non congrues par rapport au module 2) qui satisfont à la congruence

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Effectuons les produits μ à μ de ces diverses lettres, puis formons la somme de tous ceux de ces produits tels que

$$(a_1, b_1, c_1, d_1;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)(a_2, b_2, c_2, d_2;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) \ldots (a_\mu, b_\mu, \ldots, \delta_\mu)$$

qui satisfont au système de relations

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_\mu \equiv \ldots$$
$$\equiv \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\mu \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

et appelons ϕ_μ la fonction entière de degré μ qui en résulte. Le premier groupe hypoabélien ou le second groupe de Steiner est formé par les substitutions qui laissent invariables toutes les fonctions ϕ_μ.

Or il est possible, parmi ces 120 lettres, d'en déterminer 8

$$(a_i, b_i, c_i, d_i;\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 4)$$

* V. Jordan, *Traité des substitutions*, p. 199–206, 229, 242–249.

telles que l'on ait

$$a_i\alpha_j + b_i\beta_j + c_i\gamma_j + d_i\delta_j + a_j\alpha_i + b_j\beta_i + c_j\gamma_i + d_j\delta_i) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

quels que soient les indices i et j, pourvu qu'ils soient distincts. Il suffit par exemple de prendre

$$(0001,\ 0001),\ (0111,\ 0100),\ (0100,\ 1101),\ (0101,\ 0110),$$
$$(0011,\ 0010),\ (1000,\ 1001),\ (0010,\ 1111),\ (0110,\ 1011).$$

Cherchons à déterminer celles des 120 lettres qui peuvent se mettre sous la forme

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_\rho,\ b_1 + \ldots + b_\rho, \ldots, \delta_1 + \ldots + \delta_\rho),$$

ρ désignant l'un des nombres $2, 3, \ldots, 8$. En écrivant la congruence fondamentale à laquelle doivent satisfaire les 8 indices de cette lettre, on arrive à

$$\rho + \frac{\rho(\rho-1)}{2} = \frac{\rho(\rho+1)}{2} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

ce qui exige que ρ soit l'un des nombres 2, 5 ou 6. En prenant successivement ces trois cas, on arrive à

$$\frac{8.7}{1.2} + \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} \equiv 112$$

nouvelles lettres. Ces lettres sont distinctes entre elles et distinctes des premières, sinon en effet on aurait un système de congruences de la forme

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_\rho \equiv 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1 + d_2 + \ldots + d_\rho \equiv 0, & \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\rho \equiv 0, \end{cases}$$

ρ désignant l'un des nombres $1, 2, \ldots, 8$. Mais, i désignant un nombre différent de ρ, la congruence

$$a_i\alpha_\rho + b_i\beta_\rho + \ldots + \delta_i d_\rho \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

deviendrait alors

$$a_i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\rho-1}) + \ldots + \delta_i(d_1 + d_2 + \ldots d_{\rho-1}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

et il suffisait de prendre $i = 1$, si ρ est pair, et $i = 8$ si ρ est impair, pour rendre le premier membre congru à zéro, ce qui est impossible.

Nous pouvons donc déduire les 120 lettres des 8 premières par des additions. En appelant $x_i + x_9$ la lettre $(a_i, b_i, \ldots, \delta_i)$, où x_9 désigne

$$(a_1 + \ldots + a_8,\ b_1 + \ldots + b_8, \ldots, \delta_1 + \ldots \delta_8),$$

les 120 lettres se mettent sous la forme

$$C_{ij} = x_i + x_j, \quad C_{ijk} = x_i + x_j + x_k \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 9)$$

avec

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_9 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

La polynome ϕ_2 est alors composé de termes de la forme

$$C_{12}\, C_{13}\, C_{23}, \quad C_{12}\, C_{134}\, C_{234}, \quad C_{123}\, C_{456}\, C_{789}.$$

On voit que deux lettres C sont réunies dans un même terme si les lettres c étudiées tout à l'heure et qui sont affectées des même indices, sont *alliées*, et réciproquement. En faisant correspondre entre elles les lettres C et c qui ont les mêmes indices, et en remarquant que le groupe Γ' mentionné tout à l'heure est le groupe le plus général qui remplace des lettres alliées par des lettres alliées et des lettres non alliées par des lettres non alliées, on voit que toute substitution du premier groupe hypoabélien correspond à une substitution faisant partie de Γ'. Comme d'autre part d'après les recherches de M. Jordan, l'ordre du premier groupe hypoabélien est 120.56.27.16.10.6, ces deux groupes sont isomorphes holoédriques.

On peut remarquer que deux lettres C correspondent à deux lettres c alliées si l'on a la congruence

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d\delta' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d'\delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

car cette congruence exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les 8 indices $a + a', \ldots, \delta + \delta'$ définissent une lettre C. On pourra donc faire correspondre l'ensemble des 56 lettres alliées à une lettre c, par exemple c_{89}, à l'ensemble des 56 lettres C satisfaisant à

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \equiv 1, \quad d + \delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

obtenues en partant de la lettre particulière (0001, 0001). Mais on peut faire correspondre les 56 lettres associées à c_{89} aux 56 racines secondaires rencontrées dans le cas de $l = 8$,

$$\alpha_i = c_{i8}, \quad \beta_i = c_{i9}, \quad \alpha_{ij} = c_{ij8}, \quad \beta_{ij} = c_{ij9};$$

les 28 couples de racines secondaires s'obtiennent en associant les racines c dont la somme est congrue à c_{89}, ce qui correspond dans les C à

$$a + a' \equiv b + b' \equiv c + c' \equiv \alpha + \alpha' \equiv \beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv 0, \quad d + d' \equiv \delta + \delta' \equiv 1.$$

On voit finalement qu'on peut faire correspondre les 28 lettres qui sont

échangées par le groupe simple Γ dont il est question dans le cas de $l = 7$, aux 28 systèmes de 6 indices $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ satisfaisant à la congruence

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

On retombe ainsi sur la notation des 28 *tangentes doubles d'une courbe plane du* 4e *ordre fournie directement par le théorème d'Abel.*

On voit de plus qu'on peut affecter les 28 tangentes doubles des indices

$$\omega_i, \ \omega_i + \omega_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, 7)$$

avec $$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_7 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

la condition nécessaire et suffisante pour que les 8 points de contact de 4 tangentes doubles soient sur une même conique, étant alors que la somme de leurs 4 indices soit congrue à zéro.

Résumé.—En passant en revue tous les cas qui viennent d'être examinés dans ce paragraphe, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante.

La résolution de l'équation caractéristique d'un groupe de transformations simple de rang l se ramène en général, à part quelques extractions de racines carrées à la résolution d'une équation algébrique de degré l. Il y a exception pour les groupes du type A), *pour lesquels il faut résoudre une équation de degré $l + 1$, pour les groupes de rang* 4 *et du type* D) *ou* F), *pour lesquels il faut résoudre une équation du* 3e *degré et une du* 4e, *et enfin pour les groupes du type* E). *Pour ces derniers, on est ramené, si $l = 6$, à une équation de même nature que celle qui donne les* 27 *droites d'une surface du troisième ordre; si $l = 7$, à une équation de même nature que celle qui donne les* 28 *tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre enfin, si $l = 8$, à une équation du* 120e *degré dont le groupe est le premier groupe hypoabélien de* 120 *lettres.*

Dans la pratique on pourra dans certains cas employer la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les coefficients de la résolvante finale, par exemple dans le cas des types A), B), C), D), F), G), parce qu'alors il est beaucoup plus facile de passer de la résolvante finale à l'équation caractéristique que de faire l'opération inverse. Par exemple dans le cas du type D), $l = 4$, on se donnera *a priori* l'équation

$$x^8 + px^6 + qx^4 + rx^2 + s = 0$$

qui admet pour racines $\pm \varpi_i$ et on en déduira l'équation qui admet pour racines

$\pm \varpi_i \pm \varpi_j$. En identifiant avec l'équation caractéristique donnée, on aura un certain nombre de relations pour déterminer p, q, r, s; on vérifiera que q est donné par une équation du troisième degré et que, q étant déterminé, p, r, s le sont aussi sans ambiguité.

§5.

Calcul des équations differentielles auxiliaires qui se présentent dans la méthode de M. Lie.

Revenons à la méthode d'intégration de M. Lie exposée dans le paragraphe 1er, et supposons-nous dans le cas réduit où on a une équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial z_n},$$

admettant un groupe simplement transitif G à n paramètres en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, les équations de ce groupe pouvant d'ailleurs contenir x. Voici comment on pourra procéder pour arriver aux équations différentielles auxiliaires dont l'établissement est le but de la méthode de M. Lie.

Décomposons le groupe G en une série normale de sous-groupes et commençons par déterminer son plus grand sous-groupe invariant intégrable Γ. Nous en connaissons les transformations infinitésimales par la résolution d'équations linéaires. Ses transformations finies peuvent être déterminées par des éliminations, d'après une méthode générale due à M. Lie. On peut en effet trouver directement les équations finies du *groupe adjoint* de G; il suffit d'effectuer sur la transformation infinitésimale générale $e_1 X_1 f + \ldots + e_r X_r f$ de G la transformation finie

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

du même groupe G; elle doit conserver la même forme, mais les e prennent certaines valeurs e'

$$e_i' = \alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \ldots + \alpha_{in} e_n,$$

où les α sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ces équations définissent le groupe adjoint. Mais d'autre part on peut calculer directement les équations finies du groupe adjoint, ou d'un sous-groupe du groupe adjoint, en partant de ses transformations infinitésimales

$$E_\mu f = \sum_{s,i}^{1,2,\ldots,n} e_s c_{s\mu i} \frac{\partial f}{\partial e_i} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

En particulier supposons, ce qui est toujours permis, que $X_1 f, \ldots, X_m f$ définissent le plus grand sous-groupe invariant intégrable Γ et de plus que $X_{i+1} f, X_{i+2} f, \ldots, X_m f$ définissent un sous-groupe invariant dans le groupe Γ, quel que soit i, ce qu'on peut toujours supposer si on a décomposé Γ en une série normale de sous-groupes. Alors le coefficient c_{iks}, si i et k sont inférieurs à m, est nul toutes les fois que s est supérieur aux deux nombres i et k. Cela étant si on veut trouver les équations finies de la transformation engendrée par la transformation infinitésimale $\lambda_1 E_1 f + \ldots + \lambda_m E_m f$, on aura à intégrer le système

$$\begin{cases} \dfrac{de'_i}{dt} = \sum\limits_{\mu, s} \lambda_\mu e'_s c_{s\mu i} & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \dfrac{de'_{m+j}}{dt} = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n-m). \end{cases}$$

On voit que $\dfrac{de'_1}{dt}$ ne dépend que de $e'_1, e'_{m+1}, \ldots, e'_n$, que $\dfrac{de'_2}{dt}$ ne dépend que de $e'_1, e'_2, e'_{m+1}, \ldots, e'_n$, et ainsi de suite. Par suite en procédant de proche en proche on n'aura jamais à intégrer que des équations de la forme

$$\frac{dx}{dt} = kx + A,$$

k étant une constante, A une fonction connue de t qui est un polynome en t et $e^{\mu_1 t}, e^{\mu_2 t}, \ldots$, ce qui est toujours possible. En donnant aux constantes d'intégration des valeurs telles que $e'_1, \ldots, e'_n$ deviennent $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pour $t = 0$, et faisant ensuite $t = 1$, on aura les équations finies du plus grand sous-groupe invariant intégrale du groupe adjoint, soient

$$e'_i = \beta_{i1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) e_1 + \ldots + \beta_{in}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) e_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En écrivant les relations

$$a_{ik}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \beta_{ik}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

on pourra exprimer les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction d'un certain nombre d'entre eux et de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ et en remplaçant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par ces valeurs dans les équations finies du groupe G, on aura les équations finies du sous-groupe Γ. En effet le groupe adjoint est isomorphe au groupe G et à sa transformation identique correspond l'ensemble des transformations distinguées de G, transformations qui font partie de Γ; par suite les deux plus grands

sous-groupes invariants intégrables se correspondent; donc si la transformation de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ appartient à Γ, il existe m quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ telles que l'on ait

$$\alpha_{ik}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \beta_{ik}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

On peut donc toujours, sans résoudre en somme autre chose que des équations linéaires, trouver les équations finies du plus grand sous-groupe invariant intégrable, et par suite calculer ses invariants par des éliminations. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1er, le problème se ramènera alors à l'intégration d'une équation à groupe semi-simple suivie de l'intégration d'une équation à groupe intégrable, c'est-à-dire suivie de m quadratures.

Supposons donc maintenant que le groupe G soit semi-simple. Si on l'a décomposé en ses sous-groupes invariants simples $g_1, g_2, \ldots, g_h$, si de plus on a réduit la structure de chacun de ces groupes à sa forme canonique et que $X_1 f, \ldots, X_r f$ soient les transformations infinitésimales correspondant à cette forme canonique, alors il est possible de trouver les équations finies des groupes à un paramètre engendrés par les transformations infinitésimales $E_1 f, \ldots, E_r f$ correspondantes du groupe adjoint.* Par suite il est possible de trouver les équations finies d'un sous-groupe de G engendré par un certain nombre des transformations infinitésimales $E_1 f, \ldots, E_r f$, en particulier les équations finies des sous-groupes $g_1, g_2, \ldots, g_h$. On pourra alors calculer les invariants des h sous-groupes engendrés par

$$g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, h);$$

ces invariants sont au nombre de n et peuvent être pris pour nouvelles variables. On est alors visiblement ramené à l'intégration de h équations à groupe simple, et *ces équations sont entièrement indépendantes les unes des autres.*

Pour ce qui regarde une équation à groupe simple G, la suite des calculs dépend du choix du sous-groupe maximum qu'on fait servir à la réduction. La détermination des *plus grands* sous-groupes des groupes simples n'a pas encore été faite complètement; mais on peut se contenter des sous-groupes *maximums* qui contiennent une transformation *arbitraire* du groupe G ou qui peuvent être ramenés à contenir une telle transformation arbitraire. Alors on peut déterminer complètement tous ces sous-groupes et ils peuvent être considérés comme engendrés au moyen d'un certain nombre des transformations infinitésimales

* V. Cartan, *Sur la structure des groupes*, p. 183.

$X_1 f, \ldots, X_r f$ qui servent à définir la forme canonique de la structure du groupe. On voit alors qu'on peut toujours trouver leurs équations finies sans résolution d'équations algébriques, et par suite conduire jusqu'au bout les calculs qui sont indiqués dans la méthode de M. Lie. Cela suppose bien entendu qu'on ait déterminé, correspondant à chaque sous-groupe maximum, un groupe transitif tel que le sous-groupe qui laisse invariant un point particulier soit précisément ce sous-groupe maximum. Or c'est ce qu'il est possible de faire. Mais le développement de ces considérations nous entraînerait bien loin, et je me propose d'ailleurs d'y revenir dans un autre travail.

Algebraic Symbols.

By Arthur Latham Baker.

---

§1. $+$ is a sign of non-interference with the condition of the operand.

$-$ is a sign of interference to the extent of a complete reversal of direction, condition or properties, or whatever may be under consideration.

$\times$ is a sign of interference to the extent of doing to the operand whatever was done to unity to produce the operator.

$\div$ is a sign of interference with the conditions of the operand to the extent of doing to the operand whatever was done to the operator to produce unity: it is the inverse of $\times$.

$\sqrt{\ }$ is a sign of interference to the extent of introducing what may be called a *mean state* or *condition* between the operand and unity: such a condition that if we repeat on it the operation necessary to produce it from unity, the result will be the original operand, e. g. $\sqrt{a}$ is such a mean condition between a and 1 that if we perform upon $\sqrt{a}$ the same operation that we did on unity to produce $\sqrt{a}$, the result will be a. It breaks the operation a into two similar successive operations.

$\sqrt{-}$ is a sign of interference to the extent that a repetition of the interference will produce a reversal of conditions: it is the symbol denoting the *mean state* or *mean condition* between $+$ and $-$, a *mean reversor*.

$\sqrt{-}$ *as a factor* (*planar*).

§2. If we consider $+$ as a sign of non-interference with the primary direction of a line in a plane, and $-$ as a sign of reversal of its direction, $\sqrt{-}$ must be the symbol of such an interference or operation, the double application of which will produce $-$. The only interpretation of such an operation is the turning of the line through a right angle.

$\sqrt{-}$ is usually designated by i.

This gives us four symbols of directional operation:

$+$, which is neutral and inoperative;

$-$, which reverses;

i, which turns through a right angle positively;

$-i$, which turns through a right angle negatively.

This naturally leads to the Argand diagram and the theory of complex functions, not as a *convention*, but as a logical consequence.

i as an exponent (planar).

§3. Denote a vector (in a plane) whose tensor is m and whose amplitude is ϕ by

$$(m, \phi)^{+1}.$$

Then we will have

$$(m, \phi)^{-1} = \left(\frac{1}{m}, -\phi\right).$$

The change induced by the reversal of the exponent has changed m and ϕ respectively into $\frac{1}{m}$ and $-\phi$.

If now we can break up this one operation of reversal into two equal operations or sets of operations, we can interpret $(m, \phi)^{i}$, the *mean reversed* condition.

We will adopt the notation

e = the operation of taking the exponential in the natural system, e. g. ε^{z}.

e^{-1} = the operation of taking the anti-exponential or natural logarithm $= l$.

r = the reversal of an operation, as follows,

re^{-1} = the reversal of a logarithm or negative logarithm $= -e^{-1}$.

re = the reversal of the operation of taking the exponential $= e^{-1}$.

$r\phi$ = reversal of an angle $= -\phi$.

rm = reversal of a tensor $= m^{-1}$.

$\left(\frac{1}{m}, -\phi\right)$ can be written $(re^{-1}em, re^{-1}e\phi)$, the order of operations being indeterminate at present; or, omitting the operands and leaving simply the symbols of operation,

$$[re^{-1}e, re^{-1}e],$$

the brackets indicating that the enclosed quantities are symbols of operation upon the tensor and amplitude respectively.

Between [1] and $[re^{-1}e]$ are three operations, performed upon two operands; six operations in all, which can be arranged in six different ways. If these six operations can be broken up into two equal sets of three each, one set of operations should define the operation i as an exponent.

We can break $re^{-1}e$ up into re^{-1} on the tensor and e on the amplitude, for instance, and in order to repeat the operation and yet introduce e^{-1} into the tensor and re into the amplitude, we must interchange the results. Indicating the interchange by the symbol $\ulcorner\!\urcorner\!\lrcorner$, we have as the symbol of the whole set of operations

$$[\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner],$$

which would be read, perform re^{-1} on the tensor, e on the amplitude, and interchange the results.

Repeating the set of operations, we have

$$[\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner]^2 = [\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner](e^{\phi}, -lm) = \left(\frac{1}{m}, -\phi\right).$$

Thus the operation $[-1, -1]$ has been broken up into two equal sets of operations, viz.

$$[\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner]^2.$$

In a similar manner it can be broken up into

$$[\ulcorner e^{-1} \lrcorner\, re\, \lrcorner],\ [\ulcorner e \lrcorner\, re^{-1} \lrcorner],\ [\ulcorner re \lrcorner\, e^{-1} \lrcorner],\ [\ulcorner r \lrcorner\, ee^{-1} \lrcorner] \text{ and } [\ulcorner ee^{-1} \lrcorner\, r\, \lrcorner].$$

The last four are excluded for the reason that they do not give the correct result when applied to (m, ϕ). Thus l indicating the natural logarithm

$$[\ulcorner e \lrcorner\, re^{-1} \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner e \lrcorner\, re^{-1} \lrcorner](-l\phi, e^{m}) = \left(-m, \frac{1}{\phi}\right),$$

$$[\ulcorner re \lrcorner\, e^{-1} \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner re \lrcorner\, e^{-1} \lrcorner](l\phi, e^{-m}) = \left(-m, \frac{1}{\phi}\right),$$

$$[\ulcorner r \lrcorner\, ee^{-1} \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner r \lrcorner\, ee^{-1} \lrcorner](\phi, m^{-1}) = (m^{-1}, \phi^{-1}).$$

$$[\ulcorner ee^{-1} \lrcorner\, r\, \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner ee^{-1} \lrcorner\, r\, \lrcorner](-\phi, m) = (-m, -\phi),$$

This leaves us only two operations,

$$[\ulcorner e^{-1} \lrcorner\, re\, \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner e^{-1} \lrcorner\, re\, \lrcorner](e^{-\phi}, lm) = (m^{-1}, -\phi), \ldots . i,$$

$$[\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner]^2 (m, \phi) = [\ulcorner re^{-1} \lrcorner\, e\, \lrcorner](e^{\phi}, -lm) = (m^{-1}, -\phi), \ldots . -i.$$

These we designate by i and $-i$, the first resulting in a positive amplitude and the second in a negative.

§4. The same reasoning might be applied to the operation

$$[\lceil E^{-1} \rfloor rE \rfloor],$$

where E is the exponential to any base and E^{-1} the corresponding logarithm, thus apparently giving another set of operations whose double application would result in $[-1, -1]$, and which apparently has the same right to be called i as has the former set.

But upon investigation we will find

$$[\lceil E^{-1} \rfloor rE \rfloor] = [\lceil \mu e^{-1} \rfloor (re)^{\frac{1}{\mu}}],$$

where μ is the modulus of the system of logarithms corresponding to the base E.

This set of operations would be read, perform re upon the amplitude and raise to the $\frac{1}{\mu}$ power, e^{-1} on the tensor and multiply by μ, and interchange the results.

Obviously this operation differs from the one designated as i only by the introduction of the operator μ, and we are quite justified in considering i as the fundamental operation and the one above as a quasi multiple of i.

This assumption is also justified as resulting in the well-known formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$$

derived by other methods.

§5. Since

$$[\lceil e^{-1} \rfloor re \rfloor](m, 0) = (m, 0)^i = (1, lm),$$

we get the theorem—*A real to the i power becomes a unit vector whose amplitude is the natural logarithm of the real.*

Since $$[\lceil e^{-1} \rfloor re \rfloor](1, \phi) = (1, \phi)^i = (e^{-\phi}, 0),$$

we get the theorem—*A unit vector to the i power becomes a real whose tensor is the reciprocal of the exponential of the amplitude.*

Applied to $(e, 0)^\phi$ we get

$$[\lceil e^{-1} \rfloor re \rfloor](e, 0)^\phi = [\lceil e^{-1} \rfloor re \rfloor](e^\phi, 0) = (1, \phi) = e^{i\phi},$$

or the well-known formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi.$$

Applied to any vector, we get

$$(m, \phi)^i = (e^{-\phi}, lm).$$

We easily derive, where α and β are any vectors with tensors m and n, and amplitudes ϕ and θ,

$$\alpha^\beta = (m, \phi)^{(n, \theta)} = (m^{n \cos\theta} . e^{-\phi \sin\theta}, \ \phi \cos\theta + lm^{n \sin\theta}).$$

Since $\quad (e^\theta, 0)^i = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$

$$(e^\theta, 0)^{ni} = (e^{i\theta})^n = (e^{\theta n}, 0)^i = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

or $\quad (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (Demoivre's theorem).

§6. One equation,

$$e^{n\pi i} = \pm 1,$$

is noteworthy as containing in the most compact form possible all the algebraic symbols of operation: $+$, $-$, i, $\times$, $\div$; the three what might be called universal constants, whose obtrusiveness is so marked in physical investigations, 1, π, e; and finally, as if to complete its comprehensiveness, a symbol for all integral numbers. The reason for this universal obtrusiveness of 1, π and e may consist in the unities which they represent: 1, the foundation of all calculation; π, the measure of geometric completeness, the measure of the completeness of the sweep of the horizon, or of the celestial dome; e, the measure of algebraic completeness, the measure of the involution of the smallest possible factor carried to its utmost limit, the measure of the completeness of the involution of the *only factor, the smallest possible improper fraction,* which will give a *definite result.* The complete involution of the *largest proper fraction* gives e^{-1}.

§7. From $e^{i\phi} = e^{i\phi + 2n\pi i} = (1, \phi)$ and $e^x = m$, we easily get

$$e^{x + i\phi + 2n\pi i} = m\,(1, \phi) = (m, \phi) = m\,(\cos\phi + i \sin\phi)$$

and

$$\begin{aligned} L(m, \phi) &= L(a + ib) = lm + i\phi + 2n\pi i, \\ L(m, 0) &= Lm = lm + 2n\pi i, \\ L(-m, 0) = L(m, \pi) = L(-m) &= lm + i\pi + 2n\pi i \\ &= lm + (2n + 1)\pi i, \end{aligned}$$

where L indicates the generalized logarithm and l the logarithm as ordinarily understood.

A special case in its simplest form is

$$L(-1) = i\pi.$$

§8. This interpretation of i as a symbol of *mean reversal* makes intelligible such equations as

$$(4.810475\ldots.)^i = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)^i = i = \left(1,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(23.14\ldots.)^i \quad = (e^{\pi})^i = -1 = (1,\ \pi) = (-1,\ 0),$$

$$\log_{10} i \quad = i.0.68218\ldots.,$$

$$li = i\,\frac{\pi}{2} = i.1.570796\ldots.$$

i in Space.

§9. To give concreteness to our conceptions, let us take a geometrical illustration and see if it will lead us to consistent results when interpreted algebraically.

Naturally, a directed dimensionless magnitude is represented by a directed straight line, a vector. As naturally, a directionless magnitude, a scalar, would be represented by a spherical shell.

If a spherical shell of unit diameter represents $+1$, an adjacent unit shell would seem to represent -1, or the reversed state of the former.

The mean reversed state could apparently be found in two different ways:

A. By revolving the $+1$ sphere about the point of contact with the second through an angle of 90°, a repetition of which operation would produce the reversed state.

B. By shrinking the shell perpendicularly to the common line of centres in the proportion $\sin\theta$ (where $\theta = \cos^{-1}$ harmonic displacement of the shell element), and moving the resulting figure, a directed unit line, one-half its dimension toward the position of -1. A repetition of this operation would produce the -1 shell.

The operation A seems to be excluded by reason of its indefiniteness, leaving B as the *mean reversed* state of a scalar. This *mean reversed* state of a scalar is a *directed line in space*, a vector, which is definitely directed as soon as the scalar units $+1$, -1 are posited. We have also a quasi-physical reason why *a* VECTOR IN SPACE, *considered as a (multiplier) symbol of an algebraic operation to be performed upon another vector has the potency of a* MEAN REVERSOR. We naturally designate it therefore by the symbol i, or by some similar *mean reversor* symbol j, k, etc., each one being a directed $\sqrt{-1}$.

§10. *Multiplication of Parallel Vectors.*

Remembering that multiplication is the doing to the operand whatever was done to $+1$ to produce the operator, we see that ii must from the very conception of mean reversed state result in reversal or -1, or $ii = -1$.

Or, to carry out the geometric conception, we continue the shrinking of the vector in the ratio $\sin\theta$ ($\theta = \cos^{-1}$ harmonic displacement of the element) and move toward the position of -1 one-half its dimension in that direction, and the result is the -1 shell. Notice that since the factors are parallel, that is identical, we repeat precisely the same operation by which the operating factor was produced, that is, operation B. Hence

$$ii = -1,$$

or, *the repetition of a mean reversal results in total reversal,* or *the multiplication of parallel vectors gives a scalar or directionless magnitude which is however the reversal of the primary or undisturbed scalar unit from which the vectors sprang.*

§11. *Multiplication of Perpendicular Vectors.*

Since now the operating vector is perpendicular to the operand vector instead of parallel to it as in §10, the resulting mean reversed state must be as different from that of §10 as perpendicularity is different from parallelism, the extreme limit of difference, or anti-parallelism if I may so call it.

There are two ways of producing a *mean reversed* state of a vector:

C. By shrinking it in the ratio $\sin\theta$, etc., into a shell as in §10.

D. By revolving it 90°.

Case D was excluded from §10 by reason of its indefiniteness, and also by reason of its lack of similarity to the method by which the operating vector was produced.

Case C is excluded from this section by reason of its lack of anti-parallelism to the method by which the operating vector was produced.

This necessitates here the use of Case D, if it can be made definite in its result. It can be made definite from the fact that it must occupy such a position that the reversal of the operating vector shall return the result to its initial condition. This position is one of perpendicularity to both operator and operand, or

$$ij = k,$$

using i, j, k in the accepted notation of mutually perpendicular unit vectors. Hence, *The multiplication (symbolization of an operation to be performed) of one unit vector into another at right angles to it, turns the operand through a right angle in a plane perpendicular to the operator, to produce the mean reversed state.*

§12. *Multiplication of Inclined Vectors.*

Naturally the result would be a combination of those of §§10 and 11, that is, it would be partly scalar and partly vector, or

$$\alpha\beta = -\cos\theta + \varepsilon \sin\theta,$$

where α and β are two unit vectors inclined at $\theta°$ and ε is a unit vector perpendicular to α and β, since this formula satisfies both the limiting cases, §§10, 11.

Hence, *The multiplication (symbolization of an operation) of one unit vector into another inclined to it at an angle θ, thus producing the mean reversed state, turns the operand through a right angle into a plane perpendicular to the multiplier, makes its tensor sin θ and adds a scalar, $-\cos\theta$.*

§13. To take a look at the subject from a different point of view; what, considered as the symbolization of an operation, is the potency of one vector in space over another?

Assuming that space is symmetrical, and consequently that no direction is pre-eminent, and that a change of sign in the multiplier (symbol of operation) or multiplicand reverses the product, we have

1°. The potency of a vector cannot be represented by $+$, for that would condemn us to impotency.

2°. It cannot be a $-$ transformer, for the effect would be reversion whatever the relative inclination of the factors, which is unreasonable.

3°. If we consider it as a *mean reversor*, we get reconcilable results.

4°. If we consider it as a partial reversor more or less potent than a *mean* reversor, we get irreconcilable results as follows: If $\alpha\beta$ partially reverses β, then $-\alpha.-\beta$ should produce the same result, but this cannot be the case unless the first operation $\alpha\beta$ produces a mean state such that the second operation $-\alpha.-\beta$ can produce the same mean state.

Hence, a vector in space, considered as the symbol of an operation to be

performed upon another vector, must be a mean reversor, and is appropriately represented by some directed $\sqrt{-1}$, viz. i, j, k, etc.

A vector multiplier is a versor, specifically, a mean reversor.

§14. *Parallel Vector Factors.*

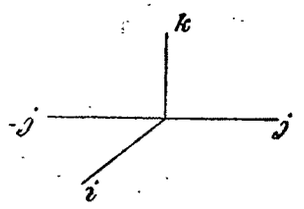
From the very nature of the operation, a mean reversal of a mean reversal must result in total reversal, or

$$ii = -1,$$

which agrees with §10.

§15. *Perpendicular Vector Factors.*

If i is to act as a mean reversor on j, it must turn it to the position k, since $-i$ acting on $-j$ must produce the same result, which can only be when the



mean state is as to position, perpendicular to both i and j. Hence tentatively

$$ij = mk,$$

where m is the stretching factor, whatever it may be.

Operating again we have

$$i.ij = i.mk = m.ik = m(-mj) = -m^2j,$$

which to constitute reversal requires $m = 1$, and therefore

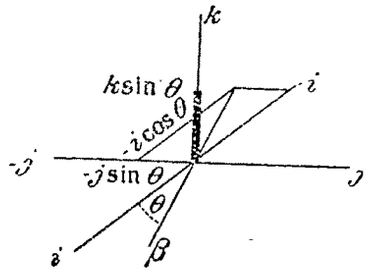
$$ij = k,$$

which agrees with §11.

§16. *Inclined Vector Factors.*

$$i\beta = \text{the mean reversed state of } \beta,$$

which, as before, must be as to direction some vector perpendicular to both of



them, since $-i.-\beta$ must produce the same result. Hence tentatively

$$i\beta = sk,$$

where s is some scalar. Operating again with i to see if the second operation will produce reversal, we get, by §15,

$$i.i\beta = i.sk = s.ik = s(-j),$$

which is not reversal, but which would be if we could add $-ci$, afterwards multiplying by some scalar if necessary to elongate.

But this would require

$$i\beta = -c + sk,$$

since $$i.i\beta = -ic + i.sk = -ic - sj.$$

Evidently if $$-ic - js = -\beta,$$

then $$c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta,$$

and we have $$i\beta = -\cos\theta + k\sin\theta,$$

which agrees with §12.

§17. *Bivectors and Biquaternions.*

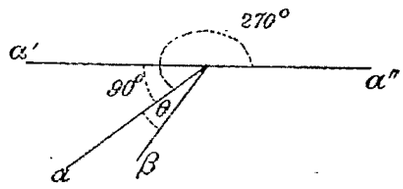
Apparently $$\sqrt{-1}\, i = -1,$$

and unit bivectors degenerate either into quaternions or a vector plus a scalar.

Using the geometrical conceptions of §9, and representing a quaternion by a vector combined with a scalar shell, we find that

$$\sqrt{-1}\,q = \sqrt{-1}\,(-\cos\theta + \varepsilon\sin\theta)$$

becomes $\sin\theta + \varepsilon\cos\theta$, or $-\sin\theta - \varepsilon\cos\theta$ according as we take the positive or negative mean reversed state. Hence, if $q = \alpha\beta$, $\sqrt{-1}\,q$ will be found by changing θ into $90 + \theta$ or $270 + \theta$.



That is, $\sqrt{-1}q$ *is found by revolving the operating factor* 90° (*or* 270°) *in the plane of the factors*, or if $q = \alpha\beta$, then $\sqrt{-1}\,q = \alpha'\beta$, $-\sqrt{-1}\,q = \alpha''\beta$.

§18. The significance of a multiplier should not be lost sight of; that it is strictly speaking not an operator with a potency of its own, but merely a symbolization of an operation to be performed, much as in $\log x$, log is not a multiplier but a symbol of operation. Looked at in this way, the property of non-commutativeness of factors is not new even to the ordinary mathematical operations, e. g. $\sqrt{a}$, $\tan a$, etc.

The symbolic character of the multiplier is apt to be lost sight of and the multiplication of one vector into another spoken of as if the multiplier had some quasi-mechanical power over the other vector.

The interpretation of i as a symbol of a mean reversed state makes the Argand diagram, the complex function and the quaternion analysis not conventions, but necessary and logical deductions from the algebraic symbols.

§19. As a symbol of algebraic operation dealing with dimensionless magnitudes, i seems to be necessarily represented, if at all, by a vector in space.

As a symbol of mean reversed state in a calculus where we have progressive and regressive multiplication, Grassmann's *Ausdehnungslehre* and allied branches, $\sqrt{-1}$ would almost necessarily be represented by a different concept or concepts.

§20. Does not this determine *the* meaning of $\sqrt{-1}$ in general, and also its method of representation in algebraic analysis? Similar methods of reasoning ought to give its method of representation in branches other than algebraic.

§21. In monodimensional domains $\sqrt{-}$ is purely imaginary, and the subject of operation is always a scalar. $(\sqrt{-})^{\infty}x = x$.

In bidimensional domains $(\sqrt{-})^{\infty}x = x + iy$ and the subject of operation is $w = f(x + iy)$. The condition of functionality is evidently the same as that for the symm trical entrance of x and iy, viz.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial . iy},$$

whence we easily get the allied conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

the foundation of Complex Functions.

In tridimensional domains we have $(\sqrt{-})^{\infty}x = x + iy + jv + ku$, a quaternion.

Is this a hint that in the Calculus of Reals, Complex Functions and Quaternions, we have run the gamut of the Algebraic Calculi?

UNIVERSITY OF ROCHESTER.

To Express the Roots of the Solvable Quantics as Symmetrical Functions of Homologues.

By Chas. H. Kummell, *Washington, D. C.*

---

1. The quadric
$$0 = ax^2 + 2bx + c$$
$$= (ax + b)^2 - (b^2 - ac) \tag{1}$$
$$= (ax + b)^2 - |b^2|, \tag{2}$$

where $b^2 - ac = |b^2|$, the discriminant of the quadric. (3)

Assume
$$0 = ax + b + b', \tag{4}$$
then
$$0 = (ax + b)^2 - b'^2. \tag{5}$$

Comparing this with (2), we have
$$|b^2| = b', \tag{6}$$
whence
$$b' = \pm |b^2|^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

The complete solution of the quadric is then given by the system
$$0 = ax_1 + b + b', \tag{8_1}$$
$$0 = ax_2 + b - b'. \tag{8_2}$$

If the discriminant
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = -|b^2| \tag{9}$$

is positive, the roots are complex conjugates. Placing
$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{ac}}, \text{ then } b = \sqrt{ac}\cos\beta;\ b' = i\sqrt{ac}\sin\beta, \tag{10}$$

and the quadric is solved by the system
$$0 = a^{\frac{1}{2}}x_1 + c^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\beta i} = a^{\frac{1}{2}}x_1\varepsilon^{-\beta i} + c^{\frac{1}{2}}, \tag{$8_1'$}$$
$$0 = a^{\frac{1}{2}}x_2 + c^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\beta i} = a^{\frac{1}{2}}x_2\varepsilon^{\beta i} + c^{\frac{1}{2}}. \tag{$8_2'$}$$

2. The cubic

$$0 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$
$$= (ax+b)^3 - 3(b^2 - ac)(ax+b) + 2(b^3 - \tfrac{3}{2}abc + \tfrac{1}{2}a^2d) \tag{11}$$
$$= (ax+b)^3 - 3|b^2|(ax+b) + 2|b^3|, \tag{12}$$

where
$$b^3 - \tfrac{3}{2}abc + \tfrac{1}{2}a^2d = |b^3|, \text{ the cubic variant.} \tag{13}$$

Assume
$$0 = ax + b + b' + b'', \tag{14}$$
then we have
$$0 = (ax+b)^3 - 3b'b''(ax+b) + b'^3 + b''^3, \tag{15}$$

and comparing this with (12), we have

$$|b^2| = b'b'', \tag{16}$$
$$|b^3| = \tfrac{1}{2}(b'^3 + b''^3), \tag{17}$$

therefore
$$b' = \{|b^3| + (|b^3|^2 - |b^2|^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}, \tag{18'}$$
$$b'' = \{|b^3| - (|b^3|^2 - |b^2|^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}. \tag{18''}$$

Except in the irreducible case,* these formulæ give the numerical values of the auxiliaries b', b'', which are obviously homologues to b, and being used in (14), give one root and the complete solution is given by the system

$$0 = ax_1 + b + b' + b'', \tag{19_1}$$
$$0 = ax_2 + b + b'1^{\frac{1}{3}} + b''1^{-\frac{1}{3}}, \tag{19_2}$$
$$0 = ax_3 + b + b'1^{-\frac{1}{3}} + b''1^{\frac{1}{3}}, \tag{19_3}$$

if
$$1^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3};\ 1^{-\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}. \tag{20}$$

For the reciprocal solution we have

$$0 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$
$$= 2(\tfrac{1}{2}ad^2 - \tfrac{3}{2}bcd + c^3) - 3(c^2 - bd)(c + dx^{-1}) + (c + dx^{-1})^3 \tag{21}$$
$$= 2|c^3| - 3|c^2|(c + dx^{-1}) + (c + dx^{-1})^3, \tag{22}$$

where
$$c^2 - bd = |c^2|, \quad \text{the quadric retrovariant,} \tag{23}$$
$$c^3 - \tfrac{3}{2}bcd + \tfrac{1}{2}a^2d = |c^3|, \text{ " cubic "} \tag{24}$$

Assuming the system

$$0 = c'' + c' + c + dx_1^{-1}, \tag{25_1}$$
$$0 = c''1^{\frac{1}{3}} + c'1^{-\frac{1}{3}} + c + dx_2^{-1}, \tag{25_2}$$
$$0 = c''1^{-\frac{1}{3}} + c'1^{\frac{1}{3}} + c + dx_3^{-1}, \tag{25_3}$$

---

* See my paper, "Symmetries of the Cubic and Methods of Treating the Irreducible Case" (Annals of Mathematics).

where the cube root of unity factors in the corresponding forms of (19) and (25) have been chosen so that their product is 1. This arrangement, though arbitrary, is adopted because it produces the most perfect symmetry. We have then

$$0 = c''^3 + c'^3 - 3c'c''(c + dx^{-1}) + (c + dx^{-1})^3. \tag{26}$$

Comparing this with (22), we have

$$|c^3| = c'c'', \tag{27}$$

$$|c^3| = \tfrac{1}{2}(c'^3 + c''^3), \tag{28}$$

therefore

$$c' = \{|c^3| \pm (|c^3|^2 - |c^2|^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}, \tag{29'}$$

$$c'' = \{|c^3| \mp (|c^3|^2 - |c^2|^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}, \tag{29''}$$

where the sign must be left indeterminate, not having given yet the connecting condition between auxiliaries b', b'' and c', c''.

Regarding the condition $0 = 1 + 1^{\frac{1}{3}} + 1^{-\frac{1}{3}}$, we easily deduce from (19)

$$0 = \frac{a}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + b. \tag{30}$$

$$0 = \frac{a}{3}(x_1 + x_1 1^{-\frac{1}{3}} + x_3 1^{\frac{1}{3}}) + b', \tag{30'}$$

$$0 = \frac{a}{3}(x_1 + x_2 1^{\frac{1}{3}} + x_3 1^{-\frac{1}{3}}) + b''. \tag{30''}$$

Similarly from (25),

$$0 = c'' + \frac{d}{3}(x_1^{-1} + x_2^{-1}1^{-\frac{1}{3}} + x_3 1^{\frac{1}{3}}) = c'' - \frac{a}{3}(x_2x_3 + x_3x_1 1^{-\frac{1}{3}} + x_1x_2 1^{\frac{1}{3}}), \tag{31''}$$

$$0 = c' + \frac{d}{3}(x_1^{-1} + x_2^{-1}1^{\frac{1}{3}} + x_3 1^{-\frac{1}{3}}) = c' - \frac{a}{3}(x_2x_3 + x_3x_1 1^{\frac{1}{3}} + x_1x_2 1^{-\frac{1}{3}}), \tag{31'}$$

$$0 = c + \frac{d}{3}(x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1}) = c - \frac{a}{3}(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2). \tag{31}$$

From these we deduce the remarkable symmetries*

$$b'b'' = b^2 - ac = |b^2|, \text{ same as (16)}, \tag{32}$$

$$b''b = b'^2 - ac', \tag{32'}$$

$$bb' = b''^2 - ac'', \tag{32''}$$

$$bc + b'c' + b''c'' = ad, \tag{33}$$

$$bc' + b'c'' + b''c = 0, \tag{33'}$$

$$bc'' + b'c + b''c' = 0, \tag{33''}$$

$$c'c = c''^2 - b''d, \tag{34''}$$

$$cc'' = c'^2 - b'd, \tag{34'}$$

$$c''c' = c^2 - bd = |c^2|, \text{ same as (27)}. \tag{34}$$

* Given first in my paper, "Symmetries of the Cubic," etc.

Relation (33) has its symmetrical form by virtue of the assumption of cube root of unity factors in (19) and (25), and gives therefore the condition connecting the auxiliaries b', b'' with c', c'' and placing

$$\tfrac{1}{2}(ad-bc)=\tfrac{1}{2}(b'c'+b''c'')=|bc|, \text{ the connectant,*} \tag{35}$$
$$p'=b'c'\,;\;\; p''=b''c'',$$

we obtain p' and p'' as roots of the quadric resolvent

$$0=p^2-2|bc|p+|b^2|.|c^2|, \tag{36}$$

whence

$$p'=b'c' \;=|bc|+\sqrt{|bc|^2-|b^2|.|c^2|}, \tag{37'}$$
$$p''=b''c''=|bc|-\sqrt{|bc|^2-|b^2|.|c^2|}. \tag{37''}$$

From (32) we deduce

$$bb'b''=b^3-abc,$$
$$=b'^3-ab'c' \;\;\therefore\;\; b'=\sqrt[3]{b|b^2|+ap'}, \tag{38'}$$
$$=b''^3-ab''c'' \;\;\therefore\;\; b''=\sqrt[3]{b|b^2|+ap''}. \tag{38''}$$

Similarly from (34),

$$c''c'c=c''^3-b''c''d \;\;\therefore\;\; c''=\sqrt[3]{c|c^2|+dp''} \tag{39''}$$
$$=c'^3-b'c'd \;\;\therefore\;\; c'=\sqrt[3]{c|c^2|+dp'} \tag{39'}$$
$$=c^3-bcd.$$

The discriminant of the cubic is

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a, & 2b, & c, & 0 \\ 0, & a, & 2b, & c \\ b, & 2c, & d, & 0 \\ 0, & b, & 2c, & d \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} |bc|, & |b^2| \\ |c^2|, & |bc| \end{vmatrix}=4(|bc|^2-|b^2|.|c^2|)=\frac{4}{a^2}(|b^3|^2-|b^2|^3)$$
$$=\frac{4}{d^2}(|c^3|^2-|c^2|^3)$$
$$=(b'c'-b''c'')^2=(p'-p'')^2, \tag{40}$$

and representing the coefficients of the cubic in terms of the auxiliaries b', b'', c', c'', we have

$$a=\frac{b'^3-b''^3}{b'c'-b''c''}=\Delta_3^{-\frac{1}{2}}(b'^3-b''^3), \tag{41}$$

$$b=-\frac{b'^2c''-b''^2c'}{b'c'-b''c''}=-\Delta_3^{-\frac{1}{2}}(b'^2c''-b''^2c'), \tag{42}$$

$$c=\frac{b'c''^2-b''c'^2}{b'c'-b''c''}=\Delta_3^{-\frac{1}{2}}(b'c''^2-b''c'^2), \tag{43}$$

$$d=-\frac{c''^3-c'^3}{b'c'-b''c''}=-\Delta_3^{-\frac{1}{2}}(c''^3-c'^3). \tag{44}$$

* No name ever having been given to this important form, this name is thought to be suggestive of its function.

We thus obtain the cubic in the canonical form

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_3^{-\frac{1}{2}}\{(b'^3 - b''^3)\,x^3 - 3\,(b'^2c'' - b''^2c')\,x^2 + 3\,(b'c''^2 - b''c'^2)\,x - (c''^3 - c'^3)\} \\ &= \Delta_3^{-\frac{1}{2}}\{(b'x - c'')^3 - (b''x - c')^3\}, \end{aligned} \tag{45}$$

whence the following system of root forms:

$$0 = b'x_1 - c'' \qquad - (b''x_1 - c'), \tag{46$_1$}$$
$$0 = (b'x_2 - c'')\,1^{\frac{1}{3}} - (b''x_2 - c')\,1^{-\frac{1}{3}}, \tag{46$_2$}$$
$$0 = (b'x_3 - c'')\,1^{-\frac{1}{3}} - (b''x_3 - c')\,1^{\frac{1}{3}}. \tag{46$_3$}$$

If the discriminant is negative, then the auxiliaries b', b'', c', c'' are complex conjugates. In that case assume in (12)

$$|b^3| = |b^2|^{\frac{3}{2}} \cos\phi \;\therefore\; \cos\phi = |b^3|.|b^2|^{-\frac{3}{2}}, \tag{47}$$
$$0 = ax + b + 2|b^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}\phi \;\therefore\; b' = |b^2|^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{i}{3}\phi};\; b'' = |b^2|^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{i}{3}\phi}, \tag{48}$$

then it becomes $0 = 4\cos^3\frac{1}{3}\phi - 3\cos\frac{1}{3}\phi - \cos\phi$, the well known relation between the cosine of an arc and the cosine of its third part. Since an arc determined by (47) has three different thirds, there will be three real roots to the cubic as given by the system

$$0 = ax_1 + b + 2|b^2|^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\phi}{3}, \tag{49$_1$}$$
$$0 = ax_2 + b + 2|b^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}(\phi + 2\pi), \tag{49$_2$}$$
$$0 = ax_3 + b + 2|b^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}(\phi - 2\pi). \tag{49$_3$}$$

For the reciprocal solution assume

$$\cos\psi = |c^3|.|c^2|^{-\frac{3}{2}}, \tag{50}$$

then

$$0 = 2|c^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}\psi + c + dx_1^{-1}, \tag{51$_1$}$$
$$0 = 2|c^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}(\psi - 2\pi) + c + dx_2^{-1}, \tag{51$_2$}$$
$$0 = 2|c^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}(\psi + 2\pi) + c + dx_3^{-1}. \tag{51$_3$}$$

The connectant is

$$|bc| = |b^2|^{\frac{1}{2}}.|c^2|^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{3}(\phi + \psi). \tag{52}$$

To determine the proper ψ to ϕ, we either compute ϕ by (47) and $\frac{1}{3}(\phi + \psi)$ by (52) or else the latter and ψ by (50). We have then in (46)

$$0 = |b^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}\phi.x_1 + |c^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}\psi, \tag{53$_1$}$$
$$0 = |b^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}(\phi + 2\pi).x_2 + |c^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}(\psi - 2\pi), \tag{53$_2$}$$
$$0 = |b^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}(\phi - 2\pi).x_3 + |c^2|^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{3}(\psi + 2\pi). \tag{53$_3$}$$

3. The quartic $0 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$ admits of being solved in five distinct ways, consistent with the plan of this paper, each corresponding to one of its five coefficients, the a-method being symmetrical to the e-method, the b- to the d- and the c-method being symmetrical to itself.

We have

$$\begin{aligned} 0 &= (ax+b)^4 - 6(b^2 - ac)(ax+b)^2 + 8(b^3 - \tfrac{3}{2}abc + \tfrac{1}{2}a^2d)(ax+b) \\ &\qquad - 3(b^4 - 2ab^2c + \tfrac{4}{3}a^2bd - \tfrac{1}{3}a^3e) \\ &= (ax+b)^4 - 6|b^2|(ax+b)^2 + 8|b^3|(ax+b) - 3|b^4|, \end{aligned} \tag{54}$$

if $$b^4 - 2ab^2c + \tfrac{4}{3}a^2bd - \tfrac{1}{3}a^3e = |b^4|, \text{ the quartic variant.} \tag{55}$$

Assuming $$0 = ax + b + b' + b'' + b''', \tag{56}$$

we have, squaring,

$$(ax+b)^2 - (b'^2 + b''^2 + b'''^2) = 2(b'b'' + b''b''' + b'''b').$$

Squaring again, we have

$$\begin{aligned} (ax+b)^4 - 2(b'^2 + b''^2 + b'''^2)(ax+b)^2 + (b'^2 + b''^2 + b'''^2)^2 \\ = 4(b'^2b''^2 + b''^2b'''^2 + b'''^2b'^2) + 8b'b''b'''(b' + b'' + b'''), \end{aligned}$$

hence by (56)

$$\begin{aligned} 0 = (ax+b)^4 - 2(b'^2 + b''^2 + b'''^2)(ax+b)^2 + 8b'b''b'''(ax+b) \\ - \{4(b'^2b''^2 + b''^2b'''^2 + b'''^2b'^2) - (b'^2 + b''^2 + b'''^2)^2\}. \end{aligned} \tag{57}$$

Comparing this with (54), we have

$$|b^2| = \tfrac{1}{3}(b'^2 + b''^2 + b'''^2), \tag{58}$$

$$|b^3| = b'b''b''', \tag{59}$$

$$|b^4| = \tfrac{4}{3}(b'^2b''^2 + b''^2b'''^2 + b'''^2b'^2) - \tfrac{1}{3}(b'^2 + b''^2 + b'''^2)^2, \tag{60}$$

whence $$b'^2 + b''^2 + b'''^2 = 3|b^2|, \tag{61}$$

$$b'^2b''^2 + b''^2b'''^2 + b'''^2b'^2 = \tfrac{9}{4}|b^2|^2 + \tfrac{3}{4}|b^4|, \tag{62}$$

$$b'^2b''^2b'''^2 = |b^3|^2, \tag{63}$$

whence the cubic resolvent

$$\begin{aligned} 0 &= (y - b'^2)(y - b''^2)(y - b'''^2) \\ &= y^3 - 3|b^2|y^2 + \tfrac{3}{4}(3|b^2|^2 + |b^3|)y - |b^3|^2 \\ &= (y - |b^2|)^3 - \tfrac{3}{4}(|b^2|^2 - |b^4|)(y - |b^2|) + \tfrac{1}{4}(|b^2|^3 + 3|b^4|.|b^2| - 4|b^3|^2) \\ &= (y - |b^2|)^3 - \tfrac{3}{4}a^2(c^2 - \tfrac{4}{3}bd + \tfrac{1}{3}ae)(y - |b^2|) \\ &\qquad - \frac{a^3}{4}\{c_3 - (2bd + ae)c + ad^2 + b^2e\}, \end{aligned} \tag{64, 65}$$

or placing
$$\frac{2}{a}(y-|b^2|)=\lambda \tag{66}$$
and denoting
$$c^2-\tfrac{4}{3}bd+\tfrac{1}{3}ae=(4_2)_0,^{*}\text{ the quadric invariant of the quartic,} \tag{67}$$
$$-\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ c, & d, & e \end{vmatrix}=c^3-(2bd+ae)c+ad^2+b^2e=(4_3)_0,^{*}\left.\begin{matrix}\text{the cubic invariant}\\ \text{of the quartic,}\end{matrix}\right\} \tag{68}$$
we have the cardinal resolvent of the quartic
$$0=\lambda^3-3(4_2)_0\lambda-2(4_3)_0. \tag{69}$$
The three roots of this are given by the system
$$\lambda_1=\sqrt[3]{(4_3)_0+\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}+\sqrt[3]{(4_3)_0-\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}, \tag{70$_1$}$$
$$\lambda_2=1^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{(4_3)_0+\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}+1^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{(4_3)_0-\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}, \tag{70$_2$}$$
$$\lambda_3=1^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{(4_3)_0+\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}+1^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{(4_3)_0-\sqrt{(4_3)_0^2-(4_2)_0^3}}, \tag{70$_3$}$$
or if all three roots are real,
$$\lambda_1=2(4_2)_0^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\theta, \tag{71$_1$}$$
$$\lambda_2=2(4_2)_0^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\theta+2\pi), \tag{71$_2$}$$
$$\lambda_3=2(4_2)_0^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\theta-2\pi), \tag{71$_3$}$$
where
$$\cos\theta=(4_3)_0(4_2)_0^{-\frac{3}{2}}. \tag{72}$$
We have then by (66), using successively the three values of y,
$$b'^2=|b^2|+\frac{a}{2}\lambda_1=b^2-a\left(c-\frac{\lambda_1}{2}\right), \tag{73$_1$}$$
$$b''^2=|b^2|+\frac{a}{2}\lambda_2=b^2-a\left(c-\frac{\lambda_2}{2}\right), \tag{73$_2$}$$
$$b'''^2=|b^2|+\frac{a}{2}\lambda_3=b^2-a\left(c-\frac{\lambda_3}{2}\right), \tag{73$_3$}$$
and we see that this method becomes too much involved in imaginaries in case the resolvent (69) has but one real root, but is very convenient if all three roots are real.

---

* A notation for covariants in general, which I have proposed in my article, "Symmetries of the Cubic," etc. Thus $(n_p)_g$ denotes a covariant of an n-tic of weight in coefficients $=p$ and of degree $=g$. For an invariant $g=0$. It will be noticed that I have taken $(4_2)_0=\frac{1}{2}S$ and $(4_3)_0=T$ of Salmon. The forms (70) thus become similar to (18) and (29).

The four roots of the quartic are then given by the system

$$0 = ax_1 + b \pm (\quad b' + b'' + b'''), \tag{74$_1$}$$
$$0 = ax_2 + b \pm (\quad b' - b'' - b'''), \tag{74$_2$}$$
$$0 = ax_3 + b \pm (-b' + b'' - b'''). \tag{74$_3$}$$
$$0 = ax_4 + b \pm (-b' - b'' + b''') \quad (\pm \text{ if } |b^3| \text{ is } \pm \text{ by } (59)). \tag{74$_4$}$$

This method may of course be applied reciprocally by exchanging x for x^{-1}, a for e, b for d, d for b and e for a, and the requisite formulæ may be written down at once.

We have

$$\begin{aligned} 0 &= ex^{-4} + 4dx^{-3} + 6cx^{-2} + 4bx^{-1} + a \\ &= (ex^{-1} + d)^4 - 6\,(d^2 - ce)(ex^{-1} + d)^2 + 8\,(d^3 - \tfrac{3}{2}\,cde + \tfrac{1}{2}\,be^2)(ex^{-1} + d) \\ &\qquad\qquad - 3\,(d^4 - 2cde^2 + \tfrac{4}{3}\,bde^3 - \tfrac{1}{3}\,ae^3) \\ &= (ex^{-1} + d)^4 - 6\,|d^2|\,(ex^{-1} + d)^2 + 8\,|d^3|\,(ex^{-1} + d) - 3\,|d^4|, \end{aligned} \tag{75}$$

where

$$d^2 - ce = |d^2|, \text{ the quadric retrovariant of the quartic,} \tag{76}$$
$$d^3 - \tfrac{3}{2}\,cde + \tfrac{1}{2}\,be^2 = |d^3|, \text{ " cubic " " "} \tag{77}$$
$$d^4 - 2cd^2e + \tfrac{4}{3}\,bde^3 - \tfrac{1}{3}\,ae^3 = |d^4|, \text{ " quartic " " "} \tag{78}$$

Assuming

$$0 = ex^{-1} + d + d' + d'' + d''', \tag{79}$$

we derive

$$\begin{aligned} 0 = (ex^{-1} + d)^4 &- 2\,(d'^2 + d''^2 + d'''^2)(ex^{-1} + d)^2 + 8d'd''d'''(ex^{-1} + d) \\ &- \{4\,(d'^2d''^2 + d''^2d'''^2 + d'''^2d'^2) - (d'^2 + d''^2 + d'''^2)^2\}, \end{aligned} \tag{80}$$

and comparing this with (75) we derive

$$d'^2 + d''^2 + d'''^2 = 3\,|d^2|, \tag{81}$$
$$d'^2d''^2 + d''^2d'''^2 + d'''^2d'^2 = \tfrac{9}{4}\,|d^2|^2 + \tfrac{3}{4}\,|d^4|, \tag{82}$$
$$d'^2d''^2d'''^2 = |d^3|^2, \tag{83}$$

whence the cubic resolvent

$$0 = (z - d'^2)(z - d''^2)(z - d'''^2), \tag{84}$$
$$= z^3 - 3\,|d^2|\,z^2 + \tfrac{3}{4}\,(3\,|d^2|^2 + |d^4|)\,z - |d^3|^2, \tag{85}$$
$$= (z - |d^2|)^3 - \tfrac{3}{4}\,(|d^2|^2 - |d^4|)(z - |d^2|) + \tfrac{1}{4}\,(|d^2|^3 - 4\,|d^3|^2 + 3\,|d^2|.|d^4|), \tag{86}$$
$$= (z - |d^2|)^3 - \tfrac{3}{4}\,e^2\,(4_2)_0\,(z - |d^2|) - \frac{e^3}{4}\,(4_3)_0, \tag{87}$$

so that assuming
$$z - |d^2| = \frac{e}{2}\lambda, \tag{88}$$
we have again the cardinal resolvent (69).

If this has all its roots real, we may use them in the forms
$$d'^2 = |d^2| + \frac{e}{2}\lambda_1 = d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right), \tag{89$_1$}$$
$$d''^2 = |d^2| + \frac{e}{2}\lambda_2 = d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_2}{2}\right), \tag{89$_2$}$$
$$d'''^2 = |d^2| + \frac{e}{2}\lambda_3 = d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_3}{2}\right), \tag{89$_3$}$$
and then we have finally the reciprocal root forms
$$0 = ex_1^{-1} + d \pm (\quad d' + d'' + d'''), \tag{90$_1$}$$
$$0 = ex_2^{-1} + d \pm (\quad d' - d'' - d'''), \tag{90$_2$}$$
$$0 = ex_3^{-1} + d \pm (-d' + d'' - d'''), \tag{90$_3$}$$
$$0 = ex_4^{-1} + d \pm (-d' - d'' + d''') \quad (\pm \text{ if } |d^3| \text{ is } \pm). \tag{90$_4$}$$
These two methods, in which we easily recognize Euler's method generalized, are strictly analogous to the methods we have used for the quadric and cubic; they may be called the methods of completing to the biquadrate. The methods to be given now are methods of completing to a square, and were first published in my article, "A New, Simple and Symmetrical Solution of the Quartic" (Mathematical Magazine, Vol. II, 4). In an improved form they are as follows:

Adding $2(c+\lambda)x^2$ to the second term and deducting it from the third, we have
$$0 = ax^4 + 2(2bx + c + \lambda)x^2 + 4\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x^2 + 4dx + e \tag{91}$$
$$= (ax^2 + 2bx + c + \lambda)^2 - \left\{4\left[b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]x^2 + 4\left[b(c+\lambda) - ad\right]x + (c+\lambda)^2 - ae\right\}. \tag{92}$$
The second term becomes also a square if
$$0 = \left[b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]\left[(c+\lambda)^2 - ae\right] - \left[b(c+\lambda) - ad\right]^2$$
$$= \begin{vmatrix} a, & b, & c+\lambda \\ b, & c - \frac{\lambda}{2}, & d \\ c+\lambda, & d, & e \end{vmatrix}.$$
$$= \lambda^3 - 3(4_2)_0\lambda - 2(4_3)_0,$$
which is the cardinal resolvent (69).

Theoretically, either root of this resolvent, real or imaginary, may be used in (91) to make the second term a square, but since only one of the roots must be used at a time, we shall use only a real root in practice. We have then in (91)

$$0 = ax^2 + 2bx + c + \lambda \pm \left(2x\sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} + \sqrt{(c+\lambda)^2 - ae}\right)$$

$$\text{if } b(c+\lambda) > ad, \quad (93_+)$$

or

$$0 = ax^2 + 2bx + c + \lambda \pm \left(2x\sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} - \sqrt{(c+\lambda)^2 - ae}\right)$$

$$\text{if } b(c+\lambda) < ad. \quad (93_-)$$

The quadric with the upper sign then gives one pair of roots, and that with the lower sign the remaining two.

Arranging terms differently in (91) we have also

$$0 = 4\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x^2 + 4(bx^2 + d)x + ax^4 + 2(c+\lambda)x^2 + e \quad (94)$$

$$= \left[2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x + bx^2 + d\right]^2$$

$$-\left\{\left[b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]x^4 + 2\left[bd - (c+\lambda)\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]x^2 + d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right\}. \quad (95)$$

The second term becomes a square if

$$0 = \left[b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]\left[d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right] - \left[bd - (c+\lambda)\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]^2$$

$$= \begin{vmatrix} a, & b, & c+\lambda \\ b, & c - \frac{\lambda}{2}, & d \\ c+\lambda, & d, & e \end{vmatrix}, \text{ i. e. resolvent (69),}$$

and applying one of its real roots, we have the quadrics

$$0 = bx^2 + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x + d \pm \left(x^2\sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} + \sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\right)$$

$$\text{if } bd > (c+\lambda)\left(c - \frac{\lambda}{2}\right), \quad (96_+)$$

$$0 = bx^2 + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x + d \pm \left(x^2\sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} - \sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\right)$$

$$\text{if } bd < (c+\lambda)\left(c - \frac{\lambda}{2}\right). \quad (96_-)$$

Arranging terms in (91) differently again we have

$$0 = e + 2(2dx^{-1} + c + \lambda)x^2 + 4\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)x^2 + 4bx^3 + ax^4 \tag{97}$$

$$= [e + (2dx^{-1} + c + \lambda)x^2]^2$$

$$-\left\{4\left[d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right]x^2 + 4[d(c+\lambda) - be]x^3 + [(c+\lambda)^2 - ae]x^4\right\}. \tag{98}$$

Here the second term becomes a square if

$$0 = \left[d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)\right][(c+\lambda)^2 - ae] - [d(c+\lambda) - be]^2$$

$$= \begin{vmatrix} a, & b, & c+\lambda \\ b, & c - \frac{\lambda}{2}, & d \\ c+\lambda, & d, & e \end{vmatrix}, \text{ i. e. resolvent (69),}$$

and applying one of its real roots, we have

$$0 = ex^{-2} + 2dx^{-1} + c + \lambda \pm \left(2x^{-1}\sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} + \sqrt{(c+\lambda)^2 - ae}\right)$$

$$\text{if } d(c+\lambda) > be, \tag{99$_+$}$$

$$0 = ex^{-2} + 2dx^{-1} + c + \lambda \pm \left(2x^{-1}\sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)} - \sqrt{(c+\lambda)^2 - ae}\right)$$

$$\text{if } d(c+\lambda) < be. \tag{99$_-$}$$

These forms result also if in (93) we write x^{-1} for x, e for a and d for b. Doing this also in (96), it will remain the same.

We easily deduce from (74)

$$b = -\frac{a}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \tag{100}$$

$$\pm b' = -\frac{a}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \tag{100'}$$

$$\pm b'' = -\frac{a}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \tag{100''}$$

$$\pm b''' = -\frac{a}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \quad (\pm \text{ if } |b^3| \text{ is } \pm). \tag{100'''}$$

Since

$$c - \frac{\lambda_1}{2} = \frac{b^2 - b'^2}{a}; \quad c - \frac{\lambda_2}{2} = \frac{b^2 - b''^2}{a}; \quad c - \frac{\lambda_3}{2} = \frac{b^2 - b'''^2}{a}, \tag{101}$$

we have

$$c - \frac{\lambda_1}{2} = \frac{a}{4}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_2^{-1})(x_3^{-1} + x_4^{-1}), \quad (102_1)$$

$$c - \frac{\lambda_2}{2} = \frac{a}{4}(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = \frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_3^{-1})(x_2^{-1} + x_4^{-1}), \quad (102_2)$$

$$c - \frac{\lambda_3}{2} = \frac{a}{4}(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = \frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_4^{-1})(x_2^{-1} + x_3^{-1}), \quad (102_3)$$

therefore, since $6c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$, we have also

$$c + \lambda_1 = \frac{a}{2}(x_1x_2 + x_3x_4) = \frac{e}{2}(x_1^{-1}x_2^{-1} + x_3^{-1}x_4^{-1}), \quad (103_1)$$

$$c + \lambda_2 = \frac{a}{2}(x_1x_3 + x_2x_4) = \frac{e}{2}(x_1^{-1}x_3^{-1} + x_2^{-1}x_4^{-1}), \quad (103_2)$$

$$c + \lambda_3 = \frac{a}{2}(x_1x_4 + x_2x_3) = \frac{e}{2}(x_1^{-1}x_4^{-1} + x_2^{-1}x_3^{-1}), \quad (103_3)$$

and placing

$$\sqrt{(c + \lambda_1)^2 - ae} = 2c'; \quad \sqrt{(c + \lambda_2)^2 - ae} = 2c''; \quad \sqrt{(c + \lambda_3)^2 - ae} = 2c''', \quad (104)$$

we have also

$$c' = \frac{a}{4}(x_1x_2 - x_3x_4) = -\frac{e}{4}(x_1^{-1}x_2^{-1} - x_3^{-1}x_4^{-1}), \quad (105_1)$$

$$c'' = \frac{a}{4}(x_1x_3 - x_2x_4) = -\frac{e}{4}(x_1^{-1}x_3^{-1} - x_2^{-1}x_4^{-1}), \quad (105_2)$$

$$c''' = \frac{a}{4}(x_1x_4 - x_2x_3) = -\frac{e}{4}(x_1^{-1}x_4^{-1} - x_2^{-1}x_3^{-1}). \quad (105_3)$$

From (90) we derive similarly

$$d = -\frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1})$$

$$= -\frac{a}{4}(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3), \quad (106)$$

$$\pm d' = -\frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_2^{-1} - x_3^{-1} - x_4^{-1})$$

$$= -\frac{a}{4}(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 - x_4x_1x_2 - x_1x_2x_3), \quad (106')$$

$$\pm d'' = -\frac{e}{4}(x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} - x_4^{-1})$$

$$= -\frac{a}{4}(x_2x_3x_4 - x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 - x_1x_2x_3), \quad (106'')$$

$$\pm d''' = -\frac{e}{4}(x_1^{-1} - x_2^{-1} - x_3^{-1} + x_4^{-1})$$

$$= -\frac{a}{4}(x_2x_3x_4 - x_3x_4x_1 - x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3)\ (\pm \text{ if } |d^3| \text{ is } \pm). \quad (106''')$$

We have then

$$b \pm b' = -\frac{a}{2}(x_1 + x_2); \quad b \mp b' = -\frac{a}{2}(x_3 + x_4), \tag{107$_1$}$$

$$b \pm b'' = -\frac{a}{2}(x_1 + x_3); \quad b \mp b'' = -\frac{a}{2}(x_2 + x_4), \tag{107$_2$}$$

$$b \pm b''' = -\frac{a}{2}(x_1 + x_4); \quad b \mp b''' = -\frac{a}{2}(x_2 + x_3)(\pm \text{ if } |b^3| \text{ is } \pm), \tag{107$_3$}$$

and

$$c + \lambda_1 \pm 2c' = ax_1x_2; \quad c + \lambda_1 \mp 2c' = ax_3x_4\,(\pm \text{ if } b\,(c + \lambda_1) - ad \text{ is } \pm), \tag{108$_1$}$$

$$c + \lambda_2 \pm 2c'' = ax_1x_3; \quad c + \lambda_2 \mp 2c'' = ax_2x_4\,(\pm \text{ if } b\,(c + \lambda_2) - ad \text{ is } \pm), \tag{108$_2$}$$

$$c + \lambda_3 \pm 2c''' = ax_1x_4; \quad c + \lambda_3 \mp 2c''' = ax_2x_3\,(\pm \text{ if } b\,(c + \lambda_3) - ad \text{ is } \pm), \tag{108$_3$}$$

whence the root forms

$$0 = ax_1 + b \pm b' \pm \sqrt{(b \pm b')^2 - a\,(c + \lambda_1 \pm 2c')}, \tag{109$_1$}$$

$$0 = ax_2 + b \pm b' \mp \sqrt{(b \pm b')^2 - a\,(c + \lambda_1 \pm 2c')}, \tag{109$_2$}$$

$$0 = ax_3 + b \mp b' \pm \sqrt{(b \mp b')^2 - a\,(c + \lambda_1 \mp 2c')}. \tag{109$_3$}$$

$$0 = ax_4 + b \mp b' \mp \sqrt{(b \mp b')^2 - a\,(c + \lambda_1 \mp 2c')}, \tag{109$_4$}$$

where the sign of b' is the same as that of $|b^3|$, and the sign of c' as that of $b\,(c + \lambda_1) - ad$. By pairing the roots differently, we can write out other root-forms. These can however conveniently only be used if all the roots of the quartic are real. If either one pair or both pair of roots are conjugate imaginaries, there will be only one manner of pairing so that the roots can be obtained from (109) by real operations. We have thus a criterion between the case of four real and four imaginary roots, that for the first the auxiliaries b', b'', b''', or c', c'', c''', or d', d'', d''' are all real, while in the other case only one set, b', c', d', say are real.

From (96) we derive the root-forms

$$0 = (b \mp b')\,x_1 + c - \frac{\lambda_1}{2} \pm \sqrt{\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - (b \mp b')(d \pm d')}, \tag{110$_1$}$$

$$0 = (b \mp b')\,x_2 + c - \frac{\lambda_1}{2} \mp \sqrt{\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - (b \mp b')(d \pm d')}, \tag{100$_2$}$$

$$0 = (b \pm b')\,x_3 + c - \frac{\lambda_1}{2} \pm \sqrt{\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - (b \pm b')(d \mp d')}, \tag{110$_3$}$$

$$0 = (b \pm b')\,x_4 + c - \frac{\lambda_1}{2} \mp \sqrt{\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - (b \pm b')(d \mp d')}, \tag{110$_4$}$$

where b' has the sign of $|b^3|$ and d' that of $bd - (c + \lambda_1)\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)$.

Changing in (109) and (110) x^{-1} for x, e for a and d for b, we have other equivalent root-forms.

From (108) we easily derive the following interesting root-forms:

$$ae^{\frac{1}{2}}x_1 = (c + \lambda_1 \pm 2c')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_2 \pm 2c'')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_3 \pm 2c''')^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}ex_1^{-1}, \qquad (111_1)$$
$$ae^{\frac{1}{2}}x_2 = (c + \lambda_1 \pm 2c')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_2 \mp 2c'')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_3 \mp 2c''')^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}ex_2^{-1}, \qquad (111_2)$$
$$ae^{\frac{1}{2}}x_3 = (c + \lambda_1 \mp 2c')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_2 \pm 2c'')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_3 \mp 2c''')^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}ex_3^{-1}, \qquad (111_3)$$
$$ae^{\frac{1}{2}}x_4 = (c + \lambda_1 \mp 2c')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_2 \mp 2c'')^{\frac{1}{2}}(c + \lambda_3 \pm 2c''')^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}ex_4^{-1}, \qquad (111_4)$$

which can be used conveniently only if all roots are real or imaginary.

Assuming

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}}; \quad \cos\gamma = \frac{c + \lambda}{\sqrt{ae}}; \quad \cos\delta = \frac{d}{\sqrt{e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}},^{*} \qquad (112)$$

then the cardinal resolvent (69) becomes

$$0 = \begin{vmatrix} a & , & \sqrt{a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\cos\beta, & \sqrt{ae}\cos\gamma \\ \sqrt{a\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\cos\beta, & c - \frac{\lambda}{2} & , & \sqrt{e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\cos\delta \\ \sqrt{ae}\cos\gamma & , & \sqrt{e\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)}\cos\delta, & e \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & , & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\beta, & 1 & , & \cos\delta \\ \cos\gamma, & \cos\delta, & 1 & \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta, \qquad (113)$$

which is satisfied by the system

$$0 = \beta - \gamma - \delta,$$

or

$$0 = \delta - \beta - \gamma,$$

or

$$0 = \gamma - \delta - \beta. \qquad (114)$$

---

*These angles were first assumed in my article, "A New, Simple and Symmetrical Solution of the Quartic" (Math. Magazine, Vol. II, 4).

We have, then, the following elegant expressions for the quadric factors of the quartic:

$$0 = \left[a^{\frac{1}{2}}x^2 + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x\varepsilon^{\beta i} + e^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\pm\gamma i}\right]$$
$$\times\left[a^{\frac{1}{2}}x^2 + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x\varepsilon^{-\beta i} + e^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\mp\gamma i}\right](\pm \text{ if } \cos\beta\cos\gamma \gtrless \cos\delta), \quad (93')$$

$$0 = \left[a^{\frac{1}{2}}x^2\varepsilon^{-\beta i} + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x + e^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\mp\delta i}\right]$$
$$\times\left[a^{\frac{1}{2}}x^2\varepsilon^{\beta i} + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x + e^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\pm\delta i}\right](\pm \text{ if } \cos\delta\cos\beta \gtrless \cos\gamma), \quad (96')$$

$$0 = \left[a^{\frac{1}{2}}x^2\varepsilon^{\gamma i} + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x\varepsilon^{\pm\delta i} + e^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\times\left[a^{\frac{1}{2}}x^2\varepsilon^{-\gamma i} + 2\left(c - \frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x\varepsilon^{\mp\delta i} + e^{\frac{1}{2}}\right](\pm \text{ if } \cos\gamma\cos\delta \gtrless \cos\beta). \quad (99')$$

The arcs β, γ, δ can be real only if the auxiliaries b', c', d' or b'', c'', d'' or b''', c''', d''' are pure imaginaries. This cannot be if the roots of the quartic are real or if two roots are imaginary, and in case of four imaginary roots, supposing x_1 conjugate to x_2 and x_3 to x_4, then b', c', d' are real and b'', c'', d'' as well as b''', c''', d''' are pure imaginaries. System (74) becomes then

$$0 = ax_1 + b \pm b' \pm bi(\tan\beta_2 + \tan\beta_3), \quad (74'_1)$$
$$0 = ax_2 + b \pm b' \mp bi(\tan\beta_2 + \tan\beta_3), \quad (74'_2)$$
$$0 = ax_3 + b \mp b' \pm bi(\tan\beta_2 - \tan\beta_3), \quad (74'_3)$$
$$0 = ax_4 + b \mp b' \mp bi(\tan\beta_2 - \tan\beta_3) \ (\pm \text{ if } |b^3| \text{ is } \pm), \quad (74'_4)$$

where we may write

$$\tan\beta_2 \pm \tan\beta_3 = \frac{\sin(\beta_2 \pm \beta_3)}{\cos\beta_2\cos\beta_3},$$

which formulæ are specially adapted to the third case of the quartic. In the same manner (90) for the reciprocal solution become

$$0 = ex_1^{-1} + d \pm d' \pm di(\tan\delta_2 + \tan\delta_3), \quad (90'_1)$$
$$0 = ex_2^{-1} + d \pm d' \mp di(\tan\delta_2 + \tan\delta_3), \quad (90'_2)$$
$$0 = ex_3^{-1} + d \mp d' \pm di(\tan\delta_2 - \tan\delta_3), \quad (90'_3)$$
$$0 = ex_4^{-1} + d \mp d' \mp di(\tan\delta_2 - \tan\delta_3) \ (\pm \text{ if } |d^3| \text{ is } \pm). \quad (90'_4)$$

Also (111) take the form

$$x_1 = \left(\frac{c + \lambda_1 + 2c'}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{i}{2}(\gamma_2 + \gamma_3)}, \tag{$111'_1$}$$

$$x_2 = \left(\frac{c + \lambda_1 + 2c'}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{-\frac{i}{2}(\gamma_2 + \gamma_3)}, \tag{$111'_2$}$$

$$x_3 = \left(\frac{c + \lambda_1 - 2c'}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{i}{2}(\gamma_2 - \gamma_3)}, \tag{$111'_3$}$$

$$x_4 = \left(\frac{c + \lambda_1 - 2c'}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{-\frac{i}{2}(\gamma_2 - \gamma_3)}, \tag{$111'_4$}$$

for which we may write the more symmetrical forms

$$x_1 = \left(\frac{e}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}, \tag{$111''_1$}$$

$$x_2 = \left(\frac{e}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{i}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3)}, \tag{$111''_2$}$$

$$x_3 = \left(\frac{e}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{i}{2}(-\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3)}, \tag{$111''_3$}$$

$$x_4 = \left(\frac{e}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{i}{2}(-\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)}, \tag{$111''_4$}$$

4. The covariants of the cubic and quartic have interesting relations to the auxiliaries which we have employed. For the cubic we have

$$\begin{aligned}(3_2)_2 = \begin{vmatrix} ax+b, & bx+c \\ bx+c, & cx+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2 \\ a, & b, & c \\ b, & c, & d \end{vmatrix} &= -(b^2 - ac)x^2 - (ad - bc)x - (c^2 - bd) \\ &= -|b^2|x - 2|bc|x - |c^2| \\ &= -b'b''x + (b'c' + b''c'')x - c'c'' \\ &= -(b'x - c'')(b''x - c'), \end{aligned} \tag{112}$$

therefore $-(3_2)_2$ may be considered a combination of the quadric variant $|b^2|$ with the quadric retrovariant. Also

$$\begin{aligned}(3_3)_3 &= 2(b^3 - \tfrac{3}{2}abc + \tfrac{1}{2}a^2d)x^3 + 3(b^2c - 2ac^2 + abd)x^2 \\ &\qquad - 3(bc^2 - 2b^2d + acd)x - 2(c^3 - \tfrac{3}{2}bcd + \tfrac{1}{2}ad^2) \\ &= (b'^3 + b''^3)x^3 - 3(b'^2c'' + b''^2c')x^2 + 3(b'c''^2 + b''c'^2)x - (c''^3 + c'^3) \\ &= (b'x - c'')^3 + (b''x - c')^3, \end{aligned} \tag{113}$$

therefore $\frac{1}{2}(3_3)_3$ is a combination of the cubic variant $|b^3|$ with the cubic retrovariant $|c^3|$ and Cayley's relation

$$(3_3)_3^2 + 4(3_2)_2^3 = \Delta_3 (3_1)_3^2 \tag{114}$$

appears as a combination of the relations

$$4\left\{\left|b^3\right|^2-\left|b^2\right|^3\right\}=a^2\Delta_3,$$
$$4\left\{\left|c^3\right|^2-\left|c^2\right|^3\right\}=d^2\Delta_3,$$

and as I have shown in my paper, "Symmetries of the Cubic," etc., to reduce the cubic

$$0=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3 \tag{115}$$

to its canonical form

$$0=\frac{1}{\Delta_3^{\frac{1}{2}}}\left[(b'x-c'y)^3-(b''x-c'y)^3\right], \tag{45'}$$

we must assume the linear transformation

$$x=c''X+c'Y \;\therefore\; X=-\frac{b''x-c'}{b'c'-b''c''}, \tag{116}$$

$$y=b'X+b''Y \;\therefore\; Y=\frac{b'x-c''}{b'c'-b''c''}, \tag{117}$$

or for one variable,

$$x=\frac{c''X+c'}{b'X+b''} \;\therefore\; X=-\frac{b''x-c'}{b'x-c''}. \tag{118}$$

For the quartic we have the quartic covariant

$$\begin{aligned}(4_2)_4&=\begin{vmatrix} ax^2+2bx+c, & bx^2+2cx+d\\ bx^2+2cx+d, & cx^2+2dx+e\end{vmatrix}\\ &=(ac-b^2)x^4+2(ad-bc)x^3+(ae+2bd-3c^2)x^2\\ &\qquad\qquad+2(be-cd)x+ce-d^2.\end{aligned} \tag{119}$$

Deducting this from

$$\frac{\lambda_1}{2}(4_1)_4=a\frac{\lambda_1}{2}x^4+4b\frac{\lambda_1}{2}x^3+6c\frac{\lambda_1}{2}x^2+4d\frac{\lambda_1}{2}x+e\frac{\lambda_1}{2}$$

we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{2}(4_1)_4-(4_2)_4&=\left[b^2-a\left(c-\frac{\lambda_1}{2}\right)\right]x^4+2\left[b(c+\lambda_1)-ad\right]x^3\\ &\quad+\left[3(c+\lambda_1)c-2bd-ae\right]x^2+2\left[d(c+\lambda_1)-be\right]x+\left[d^2-e\left(c-\frac{\lambda_1}{2}\right)\right]\\ &=b'^2x^4\pm 4b'c'x^3+2(2c'^2+b'd')x^2\pm 4c'd'x+d'^2\\ &=(b'x^2\pm 2c'x+d'^2)^2,\end{aligned} \tag{120'}$$

and similarly

$$\frac{\lambda_2}{2}(4_1)_4-(4_2)_4=(b''x^2\pm 2c''x+d''^2)^2, \tag{120''}$$

$$\frac{\lambda_3}{2}(4_1)_4-(4_2)_4=(b'''x^2\pm 2c'''x+d'''^2)^2. \tag{120'''}$$

Adding, we have

$$-3(4_2)_4 = (b'x^2 \pm 2c'x + d')^2 + (b''x^2 \pm 2c''x + d'')^2 + (b'''x^2 \pm 2c'''x + d''')^2. \quad (121)$$

This form being analogous to (61) and (81), is a sort of combination of the two. We have also

$$\left[\frac{\lambda_1}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\right]\left[\frac{\lambda_2}{2}(4_1)_4 - (4_3)_4\right]$$
$$+ \left[\frac{\lambda_3}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\right]\left[\frac{\lambda_3}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\right] + \left[\frac{\lambda_2}{2}(4_1)_4 - (4_3)_4\right]\left[\frac{\lambda_1}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}(4_1)_4^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) - 2(4_1)_4(4_2)_4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3(4_2)_4^2$$
$$= -\tfrac{3}{4}(4_1)_4^2(4_2)_0 + 3(4_2)_4^2 = (b'x^2 \pm 2c'x + d')^2(b''x^2 \pm 2c''x + d'')^2$$
$$+ (b''x^2 \pm 2c''x + d'')^2(b'''x^2 \pm 2c'''x + d''')^2$$
$$+ (b'''x^2 \pm 2c'''x + d''')^2(b'x^2 \pm 2c'x + d')^2; \quad (122)$$

also

$$\left[\frac{\lambda_1}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\right]\left[\frac{\lambda_2}{2}(4_1)_4 - (4_3)_4\right]\frac{\lambda_3}{2}(4_1)_4 - (4_2)_4\Big]$$
$$= \tfrac{1}{8}(4_1)_4^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \tfrac{1}{4}(4_2)_4(4_1)_4^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + \tfrac{1}{2}(4_2)_4^2(4_1)_4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - (4_2)_4^3$$
$$= \tfrac{1}{4}(4_1)_4^3(4_3)_0 + \tfrac{3}{4}(4_2)_4(4_1)_4^2(4_2)_0 - (4_2)_4^3 = \tfrac{1}{4}(4_3)_6^2 \text{ by Cayley's relation.} \quad (123)$$

Let us write for brevity

$$b'x^2 \pm 2c'x + d' = |b', c', d'|,$$
$$b''x^2 \pm 2c''x + d'' = |b'', c'', d''|,$$
$$b'''x^2 \pm 2c'''x + d''' = |b''', c''', d'''|,$$

then if $|b, c, d|$ is the general representative of each, we have the cubic in $|b, c, d|^2$:

$$0 = (|b, c, d|^2 - |b', c', d'|^2)(|b, c, d|^2 - |b'', c'', d''|^2)(|b, c, d|^2 - |b''', c''', d'''|^2)$$
$$= |b, c, d|^6 + 3(4_2)_4|b, c, d|^4 + 3[(4_2)_4^2 - \tfrac{1}{4}(4_2)_0(4_1)_4^2].|b, c, d|^2 - \tfrac{1}{4}(4_3)_6^2$$
$$= (|b, c, d|^2 + (4_2)_4)^3 - \tfrac{3}{4}(4_2).(4_1)_4^2(|b, c, d|^2$$
$$+ (4_2)_4) - \tfrac{1}{4}(4_3)_6^2 - (4_2)_4^3 + \tfrac{3}{4}(4_2)_0(4_1)_4^2(4_2)_4, \quad (124)$$

and if in this we put

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{|b, c, d|^2 + (4_2)}{(4_1)_4}, \quad (125)$$

and $\quad \tfrac{1}{4}(4_3)_6^2 = -(4_2)_4^3 + \tfrac{3}{4}(4_2)_0(4_1)_4^2(4_2)_4 + \tfrac{1}{4}(4_3)_0(4_1)_4^3$ (Cayley's relation),

it will become the cardinal resolvent (69).

Combining (120) in pairs, we have the following expressions for the quartic:

$$(4_1)_4 = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(|b', c', d'|^2 - |b'', c'', d''|^2), \tag{126$_1$}$$

$$= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_3}(|b'', c'', d''|^2 - |b''', c''', d'''|^2), \tag{126$_2$}$$

$$= \frac{2}{\lambda_3 - \lambda_1}(|b''', c''', d'''|^2 - |b', c', d'|^2).^* \tag{126$_3$}$$

Taking the mean of these we have since

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2 = \tfrac{1}{16}\Delta_4 \text{ (the discriminant)}, \tag{127}$$

$$(4_1)_4 = \frac{8}{3\Delta_4^{\frac{1}{2}}}\{(\lambda_2 - \lambda_3)|b', c', d'|^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)|b'', c'', d''|^2 + (\lambda_1 - \lambda_2|b''', c''', d'''|^2\}. \tag{128}$$

Each of (126) can be resolved in two quadratic factors, which yield each a pair of roots to the quartic.

5. I conclude by giving the general solutions of the four quantics in their homogeneous form.

$$0 = (1_1)_1 = ax + by = (1_1)^\wedge(x, y), \tag{129}$$

$$0 = \frac{ax + by}{\eta x + \xi y}, \tag{130}$$

$$0 = (2_1)_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (2_1)^\wedge(x, y)_2^2, \tag{131}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{(ax_1 + by_1)\xi + (bx_1 + cy_1)\eta}{\eta x_1 - \xi y} + b', \\ 0 &= \frac{(ax_2 + by_2)\xi + (bx_2 + cy_2)\eta}{\eta x_2 - \xi y_2} - b', \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

$$b' = \sqrt{b^2 - ac} = \sqrt{|b^2|}, \tag{7}$$

$$0 = (3_1)_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (3_1)^\wedge(x, y)_3, \tag{133}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{(ax_1 + by_1)\xi^2 + 2(bx_1 + cy_1)\xi\eta + (cx_1 + dy_1)\eta^2}{\eta x_1 - \xi y_1} \\ &\qquad - (b'\xi - c'\eta) - (b''\xi - c''\eta), \\ 0 &= \frac{(ax_2 + by_2)\xi^2 + 2(bx_2 + cy_2)\xi\eta + (cx_2 + dy_2)\eta^2}{\eta x_2 - \xi y_2} \\ &\qquad - (b'\xi - c'\eta)1^{\frac{1}{3}} - (b''\xi - c''\eta)1^{-\frac{1}{3}}, \\ 0 &= \frac{(ax_3 + by_3)\xi^2 + 2(bx_3 + cy_3)\xi\eta + (cx_3 + dy_3)\eta^2}{\eta x_3 - \xi y_3} \\ &\qquad - (b'\xi - c'\eta)1^{-\frac{1}{3}} - (b''\xi - c''\eta)1^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

$$b' = \sqrt[3]{|b^3| + \sqrt{|b^3|^2 - |b^2|^3}}; \quad b'' = \sqrt[3]{|b^3| - \sqrt{|b^3|^2 - |b^2|^3}}, \tag{18}$$

$$c' = \sqrt[3]{|c^3| \pm \sqrt{|c^3|^2 - |c^2|^3}}; \quad c'' = \sqrt[3]{|c^3| \mp \sqrt{|c^3|^2 - |c^2|^3}}. \tag{29}$$

---

* Credited to Darboux by Matthiesen in his great work, "Grundzüge der antiken und modernen Algebra," page 750.

Sign criterion,

$$b'c' + b''c'' = 2|bc| = ad - bc, \tag{35}$$

$$0 = (4_1)_4 = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = (4_1)^\wedge(x, y)_4, \tag{135}$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{(ax_1 + by_1)\xi^3 + 3(bx_1 + cy_1)\xi^2\eta + 3(cx_1 + dy_1)\xi\eta^2 + (dx_1 + ey_1)\eta^3}{\eta x_1 - \xi y_1} \\
&\quad \pm [b'\xi^2 \pm 2c'\xi\eta + d'\eta^2 + b''\xi^2 \pm 2c''\xi\eta + d''\eta^2 + b'''\xi^2 \pm 2c'''\xi\eta + d'''\eta^2], \\
0 &= \frac{(ax_2 + by_2)\xi^3 + 3(bx_2 + cy_2)\xi^2\eta + 3(cx_2 + dy_2)\xi\eta^2 + (dx_2 + ey_2)\eta^3}{\eta x_2 - \xi y} \\
&\quad \pm [b'\xi^2 \pm 2c'\xi\eta + d'\eta^2 - (b''\xi^2 \pm 2c''\xi\eta + d''\eta^2) - (b'''\xi^2 \pm 2c'''\xi\eta + d'''\eta^2], \\
0 &= \frac{(ax_3 + by_3)\xi^3 + 3(bx_3 + cy_3)\xi^2\eta + 3(cx_3 + dy_3)\xi\eta^2 + (dx_3 + ey_3)\eta_3}{\eta x_3 - \xi y_3} \\
&\quad \pm [-(b'\xi^2 \pm 2c'\xi\eta + d'\eta^2) + b''\xi^2 \pm 2c''\xi\eta + d''\eta^2 - (b'''\xi^2 \pm 2c'''\xi\eta + d'''\eta^2)], \\
0 &= \frac{(ax_4 + by_4)\xi^3 + 3(bx_4 + cy_4)\xi^2\eta + 3(cx_4 + dy_4)\xi\eta^2 + (dx_4 + ey_4)\eta^3}{\eta x_4 - \xi y_4} \\
&\quad \pm [-(b'\xi^2 \pm 2c'\xi\eta + d'\eta^2) - (b''\xi^2 \pm 2c''\xi\eta + d''\eta^2) + b'''\xi^2 \pm 2c'''\xi\eta + d'''\eta^2].
\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Cardinal resolvent,

$$0 = \lambda^3 - 3(4_3)_0\lambda - 2(4_3)_0, \tag{69}$$

$$b' = \sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)}; \quad b'' = \sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda_2}{2}\right)};$$

$$b''' = \sqrt{b^2 - a\left(c - \frac{\lambda_3}{2}\right)}; \quad b'b''b''' = |b^3|, \tag{73}$$

$$2c' = \sqrt{(c + \lambda_1)^2 - ae}; \quad 2c'' = \sqrt{(c + \lambda_2)^2 - ae};$$

$$2c''' = \sqrt{(c + \lambda_3)^2 - ae}; \text{ to be taken } \pm \text{ if } b(c + \lambda) - ad \text{ is } \pm, \tag{104}$$

$$d' = \sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_1}{2}\right)}; \quad d'' = \sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_2}{2}\right)};$$

$$d''' = \sqrt{d^2 - e\left(c - \frac{\lambda_3}{2}\right)}; \quad d'd''d''' = |d^3|. \tag{89}$$

Each of these solutions reverts to the respective quantic itself if $\eta x = \xi y$. If we put $\eta = 0$ we have the direct solutions, and if $\xi = 0$ we have the reciprocal. Since the ratio $\frac{\xi}{\eta}$ is perfectly arbitrary, these forms admit of infinite variation.

The notion of expressing the roots in this manner is due to Clebsch, who restricted the first term to the type

$$\frac{(ax+by)\,\xi^n+\binom{n}{1}(bx+cy)\,\xi^{n-1}+\ldots\ldots+lx+my}{\eta x-\xi y}, \tag{90}$$

which reverts to the quantic $=0$ if $\frac{x}{y}=\frac{\xi}{\eta}$.

The forms for the general roots given above for the cubic differ from those given by Matthiesen, page 730, who has in the second term in place of $-(b'\xi-c''\eta)-(b''\xi-c'\eta)$ the expression $+\sqrt[3]{(3_3)_3^\wedge(\xi,\eta)}$, supposing that ξ/η is a root to $(3_2)_2^\wedge(\xi,\eta)$. Thus the form is not truly general as mine is.

If we do not restrict ourselves to type (90), we can easily form a general root-form of as many variables as there are distinct solutions of a quantic by simply multiplying each by an indeterminate factor and adding them.

Note on Singular Solutions.

By J. M. Page.

If, as is customary, we designate by the symbol

$$Uf \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

a transformation group of one parameter in two variables, and by

$$U'f \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y},$$

the *once-extended* group corresponding to Uf, the condition—as Lie has repeatedly shown—that an ordinary differential equation of the first order

$$\Omega(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

shall be *invariant* under the group Uf, is that the expression

$$U'(\Omega) \equiv \xi\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \eta'\frac{\partial \Omega}{\partial y'}$$

shall be zero, either identically, or by means of $\Omega = 0$. Further, it is well known that if Uf is not *trivial* with respect to (1), that is, if the path-curves of the group of one parameter, Uf, are not identical with the integral curves of the differential equation (1), this equation may be integrated by a quadrature.

A limited number of the path-curves of Uf may, however, coincide with particular integral curves of (1) when Uf is *not* trivial with respect to (1); and along these curves, if any such exist, the values of y' given by Uf, namely,

$$y' \equiv \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}, \tag{2}$$

must coincide with the values of y' given by (1).

To find such curves, therefore, as are at once path-curves of Uf and particular integral curves of the invariant differential equation (1), we only need to substitute the value of y' from (2) in (1), so that

$$\Omega\left(x, y, \frac{\eta}{\xi}\right) = 0 \tag{3}$$

will represent the required curves.

But it is readily seen that the envelope of the integral curves of (1), if one exists, must also be included in (3). For, since the family of integral curves of (1) is, as a whole, invariant under the group Uf, it is clear that the envelope must be an invariant curve whose points are interchanged by means of Uf, that is, the envelope must be a path-curve of the group Uf, and, at the same time, a curve whose equation satisfies (1).

Hence if the ordinary differential equation (1) possesses a *Singular Solution*, the singular solution will be included in equation (3). If (3) breaks up into factors, of course each factor must be separately examined to see whether it is a particular integral of (1) or a Singular Solution.

It may be remarked that it is impossible for ξ and η to be both *zero* along the envelope which represents the Singular Solution of (1); for, as we saw above, the points of the envelope must be interchanged when the curves of the invariant family are interchanged, whereas all points on the curves, along which $\xi \equiv \eta \equiv 0$, are absolutely invariant under the group Uf.

Since every differential equation of the first order in two variables admits of a group of one parameter Uf, and since we can usually give by inspection the groups of which the differential equations treated in the ordinary text-books admit, the above is a simple and expeditious method of finding Singular Solutions of ordinary differential equations of the first order, when such exist. The various superfluous loci—the cusp-loci, node-loci, etc.—which are also given by the ordinary method, are thus avoided.

For example, the equation

$$y'^2 - 4xyy' + 8y^3 = 0,$$

with the complete primitive

$$y = c(x - c)^2,$$

is invariant under the group

$$Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + 3y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hence, from (3),

$$\frac{27y^3}{x^3} - 4y^3 = 0,$$

or

$$y = 0, \; y = \frac{4x^3}{27}.$$

The first equation is seen to be a particular integral, while the second is a Singular Solution.

LEIPZIG, *November*, 1895.

On a Point of the Theory of Functions.

By A. S. Chessin.

The question whether a non-uniformly convergent series may represent a continuous function has been answered in an affirmative way, first by P. Du Bois-Reymond, then by Darboux* and G. Cantor.† But all the examples of continuous functions defined by non-uniformly convergent series to my knowledge given heretofore were of the form

$$F(x) = \sum_1^\infty {}_m\, \theta(x) f_m(x). \tag{1}$$

Moreover, the point in the neighborhood of which this series became non-uniformly convergent was invariably a root of the equation $\theta(x) = 0$. For such series the following general proposition may be enunciated:

If the convergence of the series (1) *be non-uniform in the neighborhood of a point* x_0 *which is a root of the equation* $\theta(x) = 0$, *and if the value of the non-uniformly convergent series* $\sum_1^\infty {}_m f_m(x)$ *remains finite in the neighborhood of the point* x_0 *whatever value it may have for* $x = x_0$, *then* $F(x)$ *is continuous at this point. If, on the contrary, the value of the series* $\sum_1^\infty {}_m f_m(x)$ *tends to become infinite as* x *approaches the value* x_0, *then* $F(x)$ *is discontinuous at this point.*

But when $\theta(x)$ is a constant, or when x_0 is not a root of the equation $\theta(x) = 0$, the question whether a continuous function may be defined by a non-uniformly convergent series still remains unanswered.

---

*Mém. sur les fonctions discontinues. Ann. de l'École Normale Sup., 2e série, t. IV.

†Math. Annalen, XVI, p. 269. The author acknowledges that the priority in the matter belongs to P. Du Bois-Reymond.

On the Inclinational Terms in the Moon's Coordinates.

By P. H. Cowell, B. A., *Fellow of Trinity College, and Isaac Newton Student in the University of Cambridge, England.*

In the first volume of the American Journal of Mathematics, Dr. Hill published some papers in which the variation terms of the Moon's orbit were computed both literally and arithmetically with extreme accuracy. When all other terms but those depending on the ratio of the mean motions only are omitted, the remaining terms denote a periodic orbit which relatively to the Sun is a closed curve. This orbit has been made to play the part taken by the ellipse in the older lunar theories. In a subsequent paper published in the Acta Mathematica, vol. VIII, Dr. Hill obtained an expression for the motion of the Moon's perigee, so far as this depends on the ratio of the mean motions. His papers were followed by others by Prof. E. W. Brown, published in the American Journal, in which the terms depending on the solar parallax and the lunar eccentricity were computed. In all these papers Dr. Hill's orbit was treated as "the intermediary orbit," about which the actual orbit oscillates.

It is the object of this paper to take into account, according to Dr. Hill's method, the inclination of the Moon's orbit, considering it as being the manifestation of a small oscillation about Dr. Hill's distorted circular orbit, which relatively to the Sun is a closed curve.

The terms multiplied by the first power of the inclination have been calculated to the sixth order, and an expression for the part of the motion of the Moon's node, that depends upon the ratio of the mean motions only, has been found as far as the eighth order; that is to say, one term further than in Delaunay's series. The numerical values having been found to twelve places of decimals, we have the means of evaluating the residue of Delaunay's series.

The terms multiplied by the square of the inclination have been calculated

to the fifth order; that is to say, to the seventh order when account is taken of the factor γ^2.

The terms multiplied by the third power of the inclination have been calculated to the fourth order in m. From these terms the part of the motion of the Moon's node that depends on the factor γ^2 has been calculated to the sixth order of m, one term further than Delaunay's series.

The principal papers dealing with Dr. Hill's Lunar Theory are tabulated in a paper by Prof. E. W. Brown, American Journal of Mathematics, vol. XVII, p. 320. The notation of the above paper will be adopted here.

Preliminary Modifications of the Problem to be Solved.

Delaunay, in his Lunar Theory, introduced two modifications. He treated the Moon's mass as negligible in comparison with the Earth's, and the Earth's mass as negligible in comparison with the Sun's. It is well known that the first modification does not affect those terms in the final expressions for the Moon's coordinates which are known as non-parallactic; that is to say, which do not vanish when the Sun's parallax is neglected. The terms containing the first power of the solar parallax as a factor can be calculated according to the first modification and then multiplied by the ratio of the difference to the sum of the masses of the Earth and Moon. The effects of the first modification in the terms containing the second and higher orders of the Sun's parallax and the effects of the second modification—treating the Earth's mass as negligible in comparison with the Sun's—cannot be allowed for so readily, but it may be inferred that, if the solar parallax be always affected with the factor denoting the ratio of the difference to the sum of the masses of the Earth and Moon, no sensible error is introduced by the first modification, while the second modification may be adopted and its results accepted as they stand without sensible error.

For these reasons the lunar theorists, with the single exception of Hansen, have modified the problem in the above two ways before entering upon the analysis.

The Differential Equations.

Taking the axis of z perpendicular to the plane of the ecliptic, and the axes x, y moving in the plane of the ecliptic, so that the axis of x is constantly directed toward the mean place of the Sun; also taking as a special unit the time in

which the mean elongation of the Moon from the Sun increases by one radian; then the effective forces for the Moon are

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2m\frac{dy}{dt} - m^2x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2m\frac{dx}{dt} - m^2y,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2},$$

where x, y, z are the coordinates of the Moon relatively to the Earth, and m is the Sun's mean motion, or, which is the same thing owing to the units of time adopted, the ratio of the Sun's mean motion to the difference of the mean motions of the Moon and Sun.

Denoting by $\varkappa$ the mass of the Earth, and in accordance with the second modification, putting $m^2a'^3$ for the mass of the Sun alone, instead of for the sum of the masses of the Sun and Earth, where a' is the Sun's mean distance, the impressed forces are derived from a potential function Ω where

$$\Omega = \frac{\varkappa}{\sqrt{(r^2+z^2)}} + \frac{m^2a'^3}{\sqrt{(r'^2 - 2Sr' + r^2 + z^2)}} - \frac{m^2a'^3}{r'^3}S,$$

where Prof. E. W. Brown's notation, reproduced below from Amer. Jour., vol. XVII, p. 321, is adopted:

$2a'$, r', e' the major axis, radius vector and eccentricity of the Sun's orbit, supposed elliptic;
x, y, z the coordinates of the Moon;
v the solar equation of the centre;
$S = x\cos v + y\sin v$;
$n'^2a'^3$ the mass of the Sun;
$\varkappa$ the sum of the masses of the Earth and Moon;
$r^2 = x^2 + y^2$.

We shall subsequently introduce

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad s = x - y\sqrt{-1},$$
$$\zeta = e^{(t-t_0)\sqrt{-1}}, \qquad D = \zeta\frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dt}.$$

Forming the equations of motion, and taking the centrifugal terms over to the right-hand side, we have

$$\ddot{x} - 2m\dot{y} = \frac{\partial \Omega'}{\partial x},$$
$$\ddot{y} + 2m\dot{x} = \frac{\partial \Omega'}{\partial y},$$
$$\ddot{z} \qquad = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

where

$$\Omega' = \Omega + \tfrac{1}{2} m^2 (x^2 + y^2) = \Omega + \tfrac{1}{2} m^2 r^2.$$

Transforming to the complex variables just defined, the equations become

$$D^2 u + 2m\, Du = -2 \frac{\partial \Omega'}{\partial s},$$
$$D^2 s - 2m\, Ds = -2 \frac{\partial \Omega'}{\partial u},$$
$$D^2 z \qquad = - \frac{\partial \Omega'}{\partial z},$$

where

$$\Omega' = \frac{\varkappa}{(us + z^2)^{\frac{1}{2}}} + m^2 a'^2 \{(r'^2 - 2Sr' + us + z^2)^{-\frac{1}{2}} - S.r'^{-3}\} + \tfrac{1}{2} m^2 us$$
$$= \frac{\varkappa}{(us + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2} m^2 us + m^2 \frac{a'^2}{r'^2} \frac{3S^2 - us - z^2}{2}$$
$$+ \frac{m^2}{a'} \frac{a'^4}{r'^4} \frac{5S^3 - 3S(us + z^2)}{2} + \ldots,$$

omitting the term $\frac{m^2 a'^2}{r'}$ which disappears on differentiation.

From Ω' we select those terms that remain when the solar eccentricity (and therefore the solar equation of the centre) and also the solar parallax are put zero. In this case $S = x = (u + s)/2$, and the terms selected are

$$\frac{\varkappa}{(us + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{3}{8} m^2 (u + s)^2 - \tfrac{1}{2} m^2 z^2.$$

Following Prof. E. W. Brown, we put

$$\Omega' = \frac{\varkappa}{(us + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{3}{8} m^2 (u + s)^2 - \tfrac{1}{2} m^2 z^2 + \tfrac{1}{2} \Omega_1,$$

where

$$\Omega_1 = 3m^2\left[\frac{a^3}{r'^3}S^2 - \tfrac{1}{4}(u+s)^2\right] - m^2(us+z^2)\left(\frac{a'^3}{r'^3} - 1\right)$$
$$+ \frac{m^2}{a'}\cdot\frac{a'^4}{r'^4}\left[5S^3 - 3S(us+z^2)\right] + \ldots.$$

The terms which will be investigated in this paper are those that arise from treating the third coordinate of the Moon as small in comparison with the other two, instead of entirely neglecting it, as Dr. Hill did, in investigating his variation curve. The solar parallax and eccentricity will be neglected, and consequently Ω_1 is neglected also. The differential equations therefore become

$$(D^2 + 2mD + \tfrac{3}{2}m^2)\,u + \tfrac{3}{2}m^2 s - \frac{\varkappa u}{(us+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$(D^2 - 2mD + \tfrac{3}{2}m^2)\,s + \tfrac{3}{2}m^2 u - \frac{\varkappa s}{(us+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$(D^2 - m^2 \qquad)\,z \qquad - \frac{\varkappa z}{(us+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

When z is neglected, the solution involves four arbitrary constants: of these, two, viz. the linear dimensions of the orbit* and the time of conjunction, occur in Dr. Hill's investigations of the variation curve. This curve represents a periodic motion, but inasmuch as two arbitrary constants are still wanting, it is not the most general solution of the equations in their modified form. The general solution should be regarded as denoting an oscillation superimposed upon Dr. Hill's periodic motion. The constants introduced define the amplitude of this oscillation and its phase. They replace the lunar eccentricity and the time of passage through perigee of the theories that take as the intermediary the ellipse and not the variation curve. As however in this paper we do not propose to retain the lunar eccentricity, we quote from Dr. Hill's papers (Amer. Jour., vol. 1) the particular solution of the differential equations

$$z = 0,$$
$$u = u_0 = a_0\,\Sigma a_i \zeta^{2i+1},$$
$$s = s_0 = a_0\,\Sigma a_{-i-1}\zeta^{2i+1},$$

---

* m may have any arithmetic value consistent with convergence. Hence it appears that the mean motion and the mean distance are both arbitrary. This is because κ, the mass of the Earth and Moon, will be eliminated before integration. It follows that κ is a definite function of m and a_0 (the linear dimension), and possibly of other constants as well.

the algebraical and numerical values of the quantities a_i being given in the papers referred to.

Let γ denote a constant of the same order as z. Then we are seeking the most general solution of the form

$$z = z_\gamma + z_{\gamma^3} + z_{\gamma^5} + \ldots\ldots,$$
$$u = u_0 + u_{\gamma^2} + u_{\gamma^4} + \ldots\ldots,$$
$$s = s_0 + s_{\gamma^2} + s_{\gamma^4} + \ldots\ldots,$$

where the suffixes denote the order of the terms in γ.

The most general solution should contain six arbitrary constants. Two, however, disappear, as we are not considering the lunar eccentricity. We should therefore still have four. Besides the two introduced by Dr. Hill, we shall have one, K, replacing Delaunay's γ, defining the amplitude of the oscillation about the variation curve and another defining the phase of that oscillation at a given epoch.

It is useful to regard the terms involving K as defining an oscillation about a periodic motion, for we are thereby enabled to predict the character of the solution. So long as the oscillation is small, so that the square of its amplitude may be neglected, we know that its period is independent of its amplitude. The principal part of the motion of the Moon's node is therefore a function of m only. Considerations of symmetry show that u, s will involve only even powers and z only odd powers of K in accordance with the type of solution assumed above. The period of the oscillation, more commonly called the period of revolution with respect to the node, will clearly only involve even powers of K.

The First Power of the Inclination.

We must try and satisfy the differential equations accurately to order K with the assumed solutions

$$u = u_0, \quad s = s_0, \quad z = z_\gamma.$$

The first two equations are obviously satisfied. The third equation, on neglecting K^3, becomes

$$D^2 z_\gamma = \left(m^2 + \frac{\varkappa}{\gamma^3}\right) z_\gamma.$$

The solution is of the form

$$z_\gamma\sqrt{-1} = Ka_0\sum_{-\infty}^{\infty} K_j\,(\zeta^{2j+g} - \zeta^{-2j-g}),$$

where $K_0 = 1$.

The quantities K_j are all determinate: K is one of the two arbitrary constants required: the other has not been put in evidence, but corresponding to the definition $\zeta = e^{\sqrt{-1}(t-t_0)}$, we may suppose $\zeta^g = e^{\sqrt{-1}g(t-t_1)}$, in which case t_1 is the second arbitrary constant required, defining the time of passage through the node. No confusion will be introduced by these definitions, since g is incommensurable, and integral powers only of ζ and ζ^g are required.

The expression $m^2 + \frac{\varkappa}{(u_0 s_0)^3}$ involves only quantities calculated by Dr. Hill, and which we therefore suppose known.

Following Prof. E. W. Brown's notation, we write

$$\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\varkappa}{(u_0 s_0)^3} = \sum_{-\infty}^{\infty} M_i \zeta^{2i}.$$

The quantities M_i are calculated arithmetically by the method of special values, and algebraically by a process explained by Dr. Hill (Acta Math., vol. VIII, p. 12). Dr. Hill has not however obtained the algebraical values to the order required for this paper. By his methods the following results have been obtained:

$$2M_0 = 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + 0.m^3 - \frac{9}{2^5}m^4 + 4m^5 + \frac{34}{3}m^6 + 15m^7 + \frac{2704801}{2^{13}.3^3}m^8,$$

$$2M_1 = \frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{2^2}m^3 + \frac{20}{3}m^4 + \frac{43}{3^2}m^5 + \frac{18709}{2^9.3^3}m^6 + \frac{759413}{2^{10}.3^4.5}m^7,$$

$$2M_2 = \frac{33}{2^4}m^4 + \frac{2937}{2^6.5}m^5 + \frac{23051}{2^4.3.5^2}m^6,$$

$$2M_3 = \frac{1393}{2^9}m^6.$$

Generally M_i is of order m^{2i}.

Substituting the assumed solution in the differential equation, we obtain

$$(2j+g)^2 K_j - 2\sum_{i=-\infty}^{\infty} K_i M_{j-i} = 0.$$

By giving j the values $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k$, we obtain $2k+1$ equations which will determine the ratios of K_j to K_0 $(j = \pm 1, \ldots \pm k)$ and also the value of g. In the equation above written the coefficient of K_j is $(2j+g)^2 - 2M_0$ in general, a large quantity, whereas every other coefficient is of the second order at least. The equation therefore serves primarily to determine K_j. If we put $j = 0$ we get

$$g^2 = 2\sum_{i=-\infty}^{\infty} M_{-i} K_i / K_0,$$

an equation for determining g.

From the last equation we obtain

$$g^2 = 2M_0 \text{ to order } m^2,$$

whence

$$g = 1 + m + \frac{3}{2^2} m^2.$$

Hence, whereas $(2j+g)^2 - 2M_0$ is generally of order m^0, when $j = -1$ it is of order m. The equation for K_{-1},

$$[(-2+g)^2 - 2M_0]\, K_{-1} = 2\sum_{\substack{-\infty \\ i \neq -1}}^{\infty} K_i M_{-1-i},$$

shows that $K_{-1} : K_0$ is of order m. The general law that $K_{-k} : K_0$ is of order m^{2k-1}, and that $K_k : K_0$ is of order m^{2k} now follows easily.

Proceeding by continued approximation, we obtain

$$g = 1 + m + \frac{3}{2^2} m^2 - \frac{33}{2^5} m^3 - \frac{105}{2^7} m^4 + \frac{43}{2^{11}} m^5 + \frac{2567}{2^{13}.3} m^6 + \frac{347699}{2^{16}.3^2} m^7 + \frac{6442309}{2^{18}.3^3} m^8,$$

and the subsidiary quantities

$$g^2 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 - \frac{9}{2^4} m^3 - \frac{201}{2^6} m^4 - \frac{3221}{2^{10}} m^5 + \frac{1031}{2^{12}.3} m^6 + \frac{917555}{2^{15}.3^2} m^7 + \frac{13397317}{2^{17}.3^3} m^8,$$

$$g^2 - 2M_0 = -\frac{9}{2^4} m^3 - \frac{183}{2^6} m^4 - \frac{7317}{2^{10}} m^5 - \frac{138233}{2^{12}.3} m^6 - \frac{3506125}{2^{15}.3^2} m^7 - \frac{9959833}{2^{17}.3^3},$$

$$(-2+g)^2-2M_0=-4m-3m^2+\frac{57}{2^4}m^3+\frac{27}{2^6}m^4-\frac{7403}{2^{10}}m^5-\frac{47789}{2^{12}}m^6,$$

$$(2+g)^2-2M_0=8+4m+3m^2-\frac{75}{2^4}m^3-\frac{393}{2^6}m^4,$$

$$(-4+g)^2-2M_0=8-8m-6m^2+\frac{123}{2^4}m^3,$$

$$(4+g)^2-2M_0=24+8m+6m^2,$$

$$(-6+g)^2-2M_0=24-12m,$$

$$(6+g)^2-2M_0=48,$$

and also the coefficients

$$K_{-1}:K_0=-\frac{3}{2^3}m-\frac{29}{2^5}m^2-\frac{2029}{2^9.3}m^3-\frac{18875}{2^{11}.3^2}m^4-\frac{44633}{2^{14}.3^3}m^5+\frac{5569883}{2^{16}.3^4}m^6,$$

$$K_1:K_0=\frac{3}{2^4}m^2+\frac{1}{2}m^3+\frac{197}{2^7.3}m^4+\frac{3067}{2^{11}.3^2}m^5-\frac{348449}{2^{13}.3^3.5}m^6,$$

$$K_{-2}:K_0=-\frac{9}{2^7}m^3-\frac{105}{2^9}m^4-\frac{8553}{2^{13}.5}m^5+\frac{123367}{2^{15}.5^2}m^6,$$

$$K_2:K_0=\frac{25}{2^8}m^4+\frac{803}{2^7.3.5}m^5+\frac{377701}{2^{11}.3^2.5^2}m^6,$$

$$K_{-3}:K_0=-\frac{75}{2^{11}}m^5-\frac{18797}{2^{13}.3.5}m^6,$$

$$K_3:K_0=\frac{833}{2^{12}.3}m^6.$$

Comparison with Delaunay's Expressions.

From Dr. Hill's expressions for x and y we form $(x^2+y^2)/a_0^2$, and hence $a_0(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Multiplying by z/a_0, we get an expression for the tangent of the latitude, or correctly to the first power of the inclination the latitude itself. This expression for the latitude is

$$2K\Big[\Big(1-\frac{3}{2^4}m^3-\frac{141}{2^8}m^4-\frac{3893}{2^{10}.3}m^5-\frac{77345}{2^{12}.3^2}m^6\Big)\sin F$$
$$+\Big(\frac{11}{2^4}m^2+\frac{13}{2^3.3}m^3+\frac{943}{2^7.3^2}m^4+\frac{6017}{2^{11}.3^3}m^5-\frac{3148129}{2^{13}.3^4.5}m^6\Big)\sin(2D+F)$$
$$+\Big(\frac{161}{2^8}m^4+\frac{3607}{2^7.3.5}m^5+\frac{1282109}{2^{11}.3^2.5^2}m^6\Big)\sin(4D+F)$$
$$+\frac{7697}{2^{12}.3}m^6\sin(6D+F)$$

$$+\left(-\frac{3}{2^3}m-\frac{13}{2^5}m^2-\frac{1133}{2^9.3}m^3-\frac{13243}{2^{11}.3^2}m^4\right.$$
$$\left.-\frac{17617}{2^{14}.3^3}m^5+\frac{6400195}{2^{16}.3^4}m^6\right)\sin(-2D+F)$$
$$+\left(-\frac{33}{2^7}m^3-\frac{225}{2^8}m^4-\frac{50563}{2^{13}.3.5}m^5-\frac{75041}{2^{15}.5^2}m^6\right)\sin(-4D+F)$$
$$+\left(-\frac{483}{2^{11}}m^5-\frac{83333}{2^{18}.3.5}m^6\right)\sin(-6D+F)\Big].$$

This is easily seen to be identical with Delaunay's expression (Delaunay's m denotes the ratio of the mean motions), provided that we equate Delaunay's γ to $K\left[1-\frac{3}{2^4}m^3-\frac{141}{2^8}m^4-\frac{3893}{2^{10}.3}m^5-\frac{77345}{2^{12}.3^2}m^6\right]$. This result is necessary to enable us to compare the two theories.

Alternative Calculation of g.

The quantity g may be determined alone without simultaneously calculating the quantities K. The method pursued is analogous to that in Dr. Hill's paper on the motion of the perigee (Acta Math., vol. VIII).

If we eliminate the quantities K from the equations

$$[(2j+g)^2-2M_0]K_j-2\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}K_iM_{j-i}=0$$

we obtain a determinant of an infinite number of rows and columns.

$$0=\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots 1, & \frac{-2M_1}{(4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{(4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{(4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_4}{(4+g)^2-2M_0} & \cdots \\
\cdots -\frac{2M_1}{(2+g)^2-2M_0}, & 1, & -\frac{2M_1}{(2+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{(2+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{(2+g)^2-2M_0} & \cdots \\
\cdots -\frac{2M_2}{g^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{g^2-2M_0}, & 1, & -\frac{2M_1}{g^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{g^2-2M_0} & \cdots \\
\cdots -\frac{2M_3}{(-2+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{(-2+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{(-2+g)^2-2M_0}, & 1, & -\frac{2M_1}{(-2+g)^2-2M_0} & \cdots \\
\cdots -\frac{2M_4}{(-4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{(-4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{(-4+g)^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{(-4+g)^2-2M_0}, & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}$$

This equation determines g. Its use, according to M. Poincaré, is legitimate,

since the sum of the elements not situated on the leading diagonal is finite, and the determinant therefore converges absolutely and uniformly.

One solution of the equation

$$D^2 z = \left(\frac{\varkappa}{r^3} + m^2\right) z$$

is

$$z = \Sigma K_j \zeta^{2j+g}.$$

This solution may be written

$$z = \sum_j K'_j \zeta^{2j+(g+2i)}$$

when

$$K'_j = K_{i+j}.$$

In this second form of the solution, $g + 2i$ replaces g, and consequently we conclude that if g is a root of the determinantal equation, $g + 2i$ is also a root when i is any integer, positive or negative. This result also follows from an inspection of the determinant. Since also the determinantal equation is unaltered on changing the sign of g, we conclude that if g_0 be one root, $\pm 2i \pm g_0$ (i, integral) is also a root. There can be no root not included under this expression, for else there would be a third solution of the third differential equation of motion linearly independent of the two known solutions

$$z = \Sigma K_j \zeta^{2j+g}$$

and

$$z = \Sigma K_j \zeta^{-2j-g},$$

which is impossible for a linear differential equation of the second order.

Since the roots are not repeated when we limit ourselves to a finite number of rows and columns, we infer that the roots are not repeated in the case considered. The infinite determinant must therefore be identically equal to

$$A\,(\cos \pi g - \cos \pi g_0)/(\cos \pi g_0 - \cos \pi \sqrt{2M_0}),$$

the denominator representing to a numerical factor the product of the denominators in the rows of the infinite determinant. When a finite number of rows are considered, the coefficient of the highest power of g is independent of the quantities M_i, and we infer therefore that so is A. On putting $M_i = 0$ ($i \neq 0$), we then obtain $A = 1$. Finally we put $g = 0$ in the identity, and we obtain

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} g_0}{\sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{2M_0}} = \square(0) =$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot\cdot & 1 & , -\frac{2M_1}{4^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{4^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{4^2-2M_0}, & -\frac{2M_4}{4^2-2M_0}, & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & -\frac{2M_1}{2^2-2M_0}, & 1 & , -\frac{2M_1}{2^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{2^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{2^2-2M_0}, & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & -\frac{2M_2}{0^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{0^2-2M_0}, & 1 & , -\frac{2M_1}{0^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{0^2-2M_0}, & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & -\frac{2M_3}{2^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{2^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{2^2-2M_0}, & 1 & ; -\frac{2M_1}{2^2-2M_0}, & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & -\frac{2M_2}{4^2-2M_0}, & -\frac{2M_3}{4^2-2M_0}, & -\frac{2M_2}{2^2-2M_0}, & -\frac{2M_1}{2^2-2M_0}, & 1 & , \cdot\cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

In this equation we may drop the suffix after g_0.

Dr. Hill has developed a determinant to $\square(0)$ (Acta Math., vol. VIII, p. 29–31). Using his results, but suppressing terms of order m^{10}, we obtain

$$\square(0) = 1 + \frac{\pi \cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(2M_0)}\right)}{4\sqrt{(2M_0)}}\left\{\frac{4M_1^2}{1-2M_0} + \frac{4M_2^2}{4-2M_0}\right\}$$

$$+ \frac{\pi \cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(2M_0)}\right)}{32\sqrt{(2M_0)}(1-2M_0)^2}\left\{\frac{\pi\cot(\pi\sqrt{(2M_0)})}{\sqrt{(2M_0)}} - \frac{1}{2M_0} + \frac{2}{1-2M_0} + \frac{9}{2.(4-2M_0)}\right\}(2M_1)^4$$

$$+ \frac{3\pi \cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(2M_0)}\right)}{8\sqrt{(2M_0)}(1-2M_0)(4-2M_0)}(2M_1)^2.\,2M_2$$

$$+ \frac{\pi \cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(2M_0)}\right)}{128\sqrt{(2M_0)}(1-2M_0)^3}\left\{\left(-\frac{1}{2M_0} + \frac{2}{1-2M_0} + \frac{9}{2.(4-2M_0)}\right)\frac{\pi\cot\pi\sqrt{(2M_0)}}{\sqrt{(2M_0)}}\right.$$

$$-\frac{25}{16M_0} + \frac{1}{4M_0^2} + \frac{2}{1-2M_0} + \frac{4}{(1-2M_0)^2} - \frac{9}{8.(4-2M_0)}$$

$$\left. + \frac{9}{(4-2M_0)^2} - \frac{4}{9-2M_0} - \frac{\pi^2}{6M_0}\right\}(2M_1)^6.$$

The last term has been written down because some parts of it are apparently of

the eighth order. These parts, however, cancel out, and the term is zero to the ninth order inclusive.

Now

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} g}{\sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} (g-1)}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{(2M_0)} - 1\right)}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{4} \left\{ (g-1)^2 - \left(\sqrt{(2M_0)} - 1\right)^2 \right\} + \ldots$$

Hence $\left(\sqrt{(2M_0)} - 1\right)^2 - (g-1)^2 =$ coefficient of $\frac{\pi^2}{4}$ in $\square(0)$ developed in powers of π.

To obtain the coefficient of π^2 in $\square(0)$,

$$\cot \frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)} \text{ may be replaced by } -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{(2M_0)} - 1\right),$$

$$\pi \cot \left(\pi \sqrt{(2M_0)}\right) \text{ " } \quad \text{ " } \quad \frac{1}{\sqrt{(2M_0)} - 1},$$

and

$$\sqrt{(2M_0)} = 1 + m + \frac{3}{2^2} m^2 - \frac{3}{2^4} m^3 + \frac{21}{2^6} m^4 + \frac{143}{2^6} m^5$$

$$+ \frac{2231}{2^8 . 3} m^6 + \frac{2431}{2^8 . 3} m^7 + \frac{1058251}{2^{14} . 3^3} m^8.$$

Hence to the coefficient of $\frac{\pi^2}{4}$ in $\square(0)$,

$$\frac{3\pi \cot \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)}\right)}{8\sqrt{(2M_0)}(1 - 2M_0)(4 - 2M_0)} (2M_1)^2 2M_2 \text{ contributes } \frac{297}{2^9} m^8 + \frac{59103}{2^{11} . 5} m^9,$$

$$\frac{\pi \cot \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)}\right)}{32\sqrt{(2M_0)}(1 - 2M_0)^2} \left[\frac{\pi \cot \pi \sqrt{(2M_0)}}{\sqrt{(2M_0)}} - \frac{1}{2M_0} + \frac{2}{1 - 2M_0} + \frac{9}{2(4 - 2M_0)} \right]$$

$$\text{contributes } -\frac{1215}{2^{12}} m^8 - \frac{24165}{2^{13}} m^9,$$

$$\frac{\pi}{4} \frac{\cot \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)}\right)}{\sqrt{(2M_0)}} \frac{4M_2^2}{4 - 2M_0} \text{ contributes } -\frac{363}{2^9} m^9,$$

$$\frac{\pi \cot \frac{\pi}{2} \sqrt{(2M_0)}}{4\sqrt{(2M_0)}} \frac{4M_1^2}{1 - 2M_0} \text{ contributes } \frac{4M_1^2}{2\sqrt{(2M_0)}\left(\sqrt{(2M_0)} + 1\right)}.$$

Now

$$4M_1^2 = \frac{9}{2^2} m^4 + \frac{57}{2^2} m^5 + \frac{681}{2^4} m^6 + \frac{233}{3} m^7 + \frac{432661}{2^9.3^2} m^8 + \frac{19693}{2^4.3.5} m^9,$$

$$2\sqrt{(2M_0)}(\sqrt{(2M_0)}+1) = 4+6m+\frac{13}{2} m^2 - \frac{3}{2} m^3 + \frac{3}{2^5} m^4 + \frac{399}{2^5} m^5,$$

whence the term

$$= \frac{9}{2^4} m^4 + \frac{87}{2^5} m^5 + \frac{723}{2^7} m^6 + \frac{2587}{2^7.3} m^7 + \frac{23941}{2^9.3^2} m^8 + \frac{42469}{2^{12}.5} m^9.$$

Also

$$(\sqrt{(2M_0)}-1)^2 = m^2 + \frac{3}{2} m^3 - \frac{15}{2^4} m^4 - \frac{15}{2^5} m^5 + \frac{707}{2^7} m^6$$
$$+ \frac{3329}{2^7.3} m^7 + \frac{91475}{2^{12}.3} m^8 + \frac{1468975}{2^{18}.3^3} m^9.$$

Hence

$$(g-1)^2 = m^2 + \frac{3}{2} m^3 - \frac{3}{2} m^4 - \frac{51}{2^4} m^5 - \frac{1}{2^3} m^6$$
$$+ \frac{371}{2^6.3} m^7 + \frac{283}{2^4.3^2} m^8 + \frac{135739}{2^{11}.3^3} m^9,$$

and hence

$$g = 1 + m + \frac{3}{2^2} m^2 - \frac{33}{2^5} m^3 - \frac{105}{2^7} m^4 + \frac{43}{2^{11}} m^5$$
$$+ \frac{2567}{2^{18}.3} m^6 + \frac{347699}{2^{16}.3^2} m^7 + \frac{6442309}{2^{18}.3^3} m^8,$$

the same result as before.

This agrees with, and is carried one term beyond, Delaunay's result.

The coefficients in the series in powers of Dr. Hill's m are considerably smaller than the coefficients of Delaunay's series. The increase in convergency is even more striking in the expression for the latitude: for instance, the term $\gamma . m^6 \sin(-2D+F)$, which here has a coefficient $\frac{1955563}{2^{16}.3^4}$ in Delaunay's series has a coefficient $-\frac{100407473}{2^{16}.3^4}$.

Arithmetical Results.

Dr. Hill has calculated by the method of special values an expression for x/r^3 with numerical coefficients (Amer. Journ., vol. I, p. 249). We hence obtain

$2M_0 = 1.$	17804	45712	77166
$2M_1 = 0.$	01261	68462	48930
$2M_2 = 0.$	00012	57766	75006
$2M_3 = 0.$	00000	12059	39899
$2M_4 = 0.$	00000	00113	02925
$2M_5 = 0.$	00000	00001	04375
$2M_6 = 0.$	00000	00000	00954
$2M_7 = 0.$	00000	00000	00008

The following arithmetical values have been obtained:

$$g = 1.\ 08517\ 14265\ 58$$

$K_{-1} =$	$-.03698$	39313	94	$K_1 =$	$+.00151$	22192	28
$K_{-2} =$	$-.00004$	65750	01	$K_2 =$	$+.00000$	58673	61
$K_{-3} =$	$-.00000$	01755	37	$K_3 =$	$+.00000$	00299	82
$K_{-4} =$	$-.00000$	00008	87	$K_4 =$	$+.00000$	00001	75
$K_{-5} =$	$-.00000$	00000	05	$K_5 =$	$+.00000$	00000	01

In performing the arithmetic, the coefficients of the quantities K were replaced by their arithmetical values. Since the arithmetical values of the quantities K were already approximately known from the series representing them, it was obvious to how many decimal places each coefficient had to be calculated.

To this value of g corresponds a motion of the node given by

$$-\frac{1}{n}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{g-1-m}{1+m} = .00399\ \ 91645.$$

Delaunay's series gives $.00399\ \ 91772,$

a difference equal to about .00000 3 of the whole.

As the error between theory and observation amounts to .0006 of the whole, it appears that it cannot be accounted for, as Delaunay supposed, by the incompleteness of that part of his expression which depends on the ratio of mean motions only.

Adams (M. N. R. A. S., Nov. 1877) has obtained the result:

$$g = 1\ \ 08517\ \ 13927\ \ 46869.$$

The discrepancy between the value obtained in this paper and that obtained by

Adams is due to the different assumed values of the mean motions. Adams uses

$$m = 0.\ \ 08084\ \ 89030\ \ 52,$$

whereas in this paper Dr. Hill's value

$$m = 0.\ \ 08084\ \ 89338\ \ 08312$$

is employed.

It is easy to verify that the difference in the two values of g divided by the difference in the two values of m is the arithmetical value of dg/dm as calculated from the algebraic series for g.

Second Powers of the Inclination.

We assume as the solution of the differential equations

$$u = u_0 + u_{\gamma^2}, \qquad s = s_0 + s_{\gamma^2}$$

correctly to order γ^2 where

$$\zeta^{-1} . u_{\gamma^2} = a_0 K^2 \sum_j [(kk)_j \zeta^{2j+2g} + (kk')_j \zeta^{2j} + (k'k')_j \zeta^{2j-2g}],$$

and

$$\zeta . s_{\gamma^2} = a_0 K^2 \sum_j [(kk)_j \zeta^{-2j-2g} + (kk')_j \zeta^{-2j} + (k'k')_j \zeta^{-2j+2g}].$$

The differential equations to be satisfied are

$$(D^2 + 2m D + \tfrac{3}{2} m^2) u + \tfrac{3}{2} m^2 s - \frac{\varkappa u}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$(D^2 - 2m D + \tfrac{3}{2} m^2) s + \tfrac{3}{2} m^2 u - \frac{\varkappa s}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

where

$$z\sqrt{-1} = K a_0 \Sigma K_j (\zeta^{2j+g} - \zeta^{-2j-g})$$

and satisfies the equation

$$(D^2 - m^2) z - \frac{\varkappa z}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

The quantity $(us + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ is inconvenient to deal with, and must be eliminated. First, multiplying the equations by s and u and subtracting, we get

$$D(-uDs + sDu + 2mus) - \tfrac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0. \qquad \text{(i)}$$

Again multiplying the equations by s, u, $2z$ and adding,

$$D^2(us) - 2m(uDs - sDu) + \tfrac{9}{2}m^2(u+s)^2 - 2Du\,Ds$$
$$+ 2zD^2z - 2m^2z^2 - \frac{2\varkappa}{(us+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

The last term must be eliminated by the help of Jacobian integral of relative motion, obtained by multiplying the equations by Ds, Du, $2Dz$, adding and integrating.

$$Du\,Ds + Dz^2 + \tfrac{9}{4}m^2(u+s)^2 - m^2z^2 + \frac{2\varkappa}{(us+z^2)^{\frac{1}{2}}} = C, \text{ a const.}$$

Adding this equation to the last,

$$D^2(us) - 2m(uDs - sDu) + \tfrac{9}{4}m^2(u+s)^2 - Du\,Ds = C + 3m^2z^2 - 2zD^2z - Dz^2. \quad \text{(ii)}$$

Calculation of the Quantities (kk').

If we substitute the above assumed values in the equations (i) and (ii) and equate the coefficients of ζ^{2i} to zero, we obtain the two equations

$$\sum_i (kk')_i \Big[\begin{array}{l} \{4j^2 + (2i+1-2j)(2i+1) + 4m(2i+1-j) + \tfrac{9}{2}m^2\}\,a_{i-j} \\ + \{4j^2 + (2i+1+2j)(2i+1) + 4m(2i+1+j) + \tfrac{9}{2}m^2\}\,a_{i+j} \end{array}$$
$$+ \tfrac{9}{2}m^2 a_{j-i-1} + \tfrac{9}{2}m^2 a_{-j-i-1}\Big]$$
$$+ 2\sum_i K_{i+j}K_i\{4j^2 + 2j(2i+g) + (2i+g)^2 - 3m^2\} = 0,$$

and

$$4j\sum_i (2i+1-j+m)\,a_{i-j}(kk')_i + 4j\sum_i (2i+1+j+m)\,a_{i+j}(kk')_i$$
$$- 3m^2\sum_i a_{j-i-1}(kk')_i + 3m^2\sum_i a_{-j-i-1}(kk')_i = 0.$$

In these equations $(kk')_j$ and $(kk')_{-j}$ occur with coefficients that are large in comparison with the coefficients of the other unknown quantities. Hence the equations may be considered as determining $(kk')_j$ and $(kk')_{-j}$, and we may replace them by two others in which $(kk')_{-j}$ and $(kk')_j$ have been respectively eliminated. The equations thus obtained will be found to differ in the sign of j only, and one

equation may therefore be suppressed, on the understanding that the other holds for negative as well as positive values of j. We are thus left with the following equation:

$$
\begin{aligned}
&-4j\Sigma_i(j-i)[[j]-4i(-1+j-m)]\,a_{-i}(kk')_{j-i}\\
&-4j\Sigma_i i\,[[j]-4(j-i)(-1+j-m)]\,a_i(kk')_{j+i}\\
&+\frac{3m^2}{2}[[j]-4(-1+j-m)(i+3j+2m)]\,\Sigma_i a_{-i+j-1}(kk')_i\\
&+\frac{3m^2}{2}[-[j]-4(-1+j-m)(-1+3j-2m)]\,\Sigma_i a_{-i-j-1}(kk')_i\\
&-8j(-1+j-m)\Sigma\{4j^2-2j(2i+g)+(2i+g)^2-3m^2\}K_iK_{i-j}\\
&=0,
\end{aligned}
$$

where
$$[j]=8j^2-2-4m+m^2.$$

This equation is an identity when $j=0$. Hence the number of the quantities (kk') exceeds by unity the number of equations to determine them. We may therefore assign any arbitrary value to one of them $(kk')_0$. Now

$$a_0\left(1+K^2(kk')_0\right)$$

is the mean value of the projection of the radius vector upon a line drawn towards the mean position of the Moon. a_0 has already been supposed to be equivalent to this quantity, when powers of K are neglected. Any assumption as to $(kk')_0$ is in reality equivalent to a more accurate definition of a_0.

Let us therefore assume $(kk')_0=0$, an assumption that simplifies the equations considerably, and which is equivalent to assuming that a_0 is equal to the mean value of the projection of the radius vector upon a line drawn to the Moon's mean place, accurately, even when quantities of the order of the square of the inclination are taken into account.

Note.—We might use the arbitrary condition at our disposal so that the relation between k, the mass of the Earth and Moon, and a_0 and m remain the same as that found by Dr. Hill (Acta Math., vol. I, p. 145) even in the higher order of approximation which we have now reached. Otherwise the relation referred to must now be modified by the addition of terms proportional to the square of the inclination.

Solving the equations, we obtain

$$
\begin{aligned}
(kk')_{-1} &= \frac{3}{2^2}m + \frac{29}{2^4}m^2 + \frac{661}{2^8.3}m^3 - \frac{26125}{2^{10}.3^2}m^4 - \frac{1385395}{2^{13}.3^3}m^5,\\
(kk')_{1} &= \qquad -\frac{3}{2^8}m^2 - \frac{23}{2^5}m^3 - \frac{109}{2^9.3}m^4 + \frac{29857}{2^{11}.3^2}m^5,\\
(kk')_{-2} &= \qquad\qquad \frac{9}{2^6}m^3 + \frac{105}{2^8}m^4 + \frac{6001}{2^{13}.5}m^5\\
(kk')_{2} &= \qquad\qquad\qquad -\frac{25}{2^6}m^4 - \frac{5299}{2^8.3.5}m^5,\\
(kk')_{-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{75}{2^{10}}m^5
\end{aligned}
$$

correctly to order m^5.

The arithmetical values of these quantities are added.

$$
\begin{aligned}
(kk')_{-1} &= +.07279\ \ 42,\\
(kk')_{1} &= -.00282\ \ 74,\\
(kk')_{-2} &= +.00009\ \ 27,\\
(kk')_{2} &= -.00002\ \ 19,\\
(kk')_{-3} &= +.00000\ \ 04,\\
(kk')_{3} &= -.00000\ \ 02.
\end{aligned}
$$

In calculating the arithmetical values, we use the equations for $(kk')_j$ and $(kk')_{-j}$ first obtained, as the labor in computing the coefficients is much less than for the equation when $(kk')_{-j}$ has been eliminated. $(kk')_{-j}$ can then be completely eliminated, whereas in the algebraic equation it still has the small coefficient

$$
\begin{aligned}
4j^2\{[j]-8j(-1+j-m)\}a_{-2j} + \frac{3m^2}{2}\{[j]-4(-1+j-m)(1+3j+2m)\}a_{3j-1}\\
+\frac{3m^2}{2}\{-[j]-4(-1+j-m)(-1+3j-2m)\}a_{-1},
\end{aligned}
$$

the last term being of order m^4.

Moreover the quantities K do not appear in the second of the two simpler equations.

Calculation of the Quantities (kk) *and* $(k'k')$.

On substituting the assumed values of u and s in the differential equations, we obtain from the coefficients of ζ^{2j+2g} the two following equations:

$$\Sigma\{4(j+g)^2+(2i+1-2j)(2i+1+2g)+4m(2i+1-j+g)+\tfrac{9}{2}m^2\}a_{i-j}(kk)_i$$
$$+\Sigma\{4(j+g)^2+(2i+1+2j)(2i+1-2g)+4m(2i+1+j-g)+\tfrac{9}{2}m^2\}a_{i+j}(k'k')_i$$
$$+\tfrac{9}{2}m^2\Sigma a_{-i+j-1}(kk)_i+\tfrac{9}{2}m^2\Sigma a_{-i-j-1}(k'k')_i$$
$$=\Sigma\{(2i+g)^2+(2j-2i+g)^2+(2i+g)(2j-2i+g)-3m^2\}K_iK_{j-i},$$

and

$$4(j+g)\,[\Sigma(2i+1-j+g+m)\,a_{i-j}(kk)_i+\Sigma(2i+1+j-g+m)\,a_{i+j}(k'k')_i]$$
$$-3m^2\Sigma a_{-i+j-1}(kk)_i+3m^2\Sigma a_{-i-j-1}(k'k')_i=0\,.$$

The terms with the largest coefficients are $(kk)_j$, $(k'k')_{-j}$. Eliminating each of these quantities in turn, we get the two equations

$$-4(j+g)\Sigma(j+g-i)[[j]-4i(-1+j+g-m)]\,a_{-i}(kk)_{j-i}$$
$$-4(j+g)\Sigma i\,[[j]-4(j+g-i)(-1+j+g-m)]\,a_i(k'k')_{-j+i}$$
$$+\frac{3m^2}{2}[[j]-4(-1+j+g-m)(1+3j+3g+2m)]\,\Sigma a_{-i+j-1}(kk)_i$$
$$+\frac{3m^2}{2}[-[j]-4(-1+j+g-m)(-1+3j+3g-2m)]\,\Sigma a_{-i-j-1}(k'k')_{-j+i}$$
$$+4(j+g)(-1+j+g-m)\Sigma\{(j-2i)^2+3(j+g)^2-3m^2\}\,K_iK_{j-i}=0,$$

and

$$-4(j+g)\Sigma(j+g-i)[[j]-4i(1+j+g+m)]\,a_i(k'k')_{-j+i}$$
$$-4(j+g)\Sigma i\,[[j]-4(j+g-i)(1+j+g+m)]\,a_{-i}(kk)_{j-i}$$
$$+\tfrac{9}{2}m^2[[j]-4(1+j+g+m)(-1+3j+3g-2m)]\,\Sigma a_{-i-j-1}(k'k')_i$$
$$+\tfrac{9}{2}m^2[-[j]-4(1+j+g+m)(1+3j+3g+2m)]\,\Sigma a_{-i+j-1}(kk)_i$$
$$+4(j+g)(1+j+g+m)\Sigma\{(j-2i)^2+3(j+g)^2-3m^2\}K_iK_{j-i}=0,$$

where $[j]\equiv 8(j+g)^2-2-4m+m^2$.

Solving the equations, we obtain

$$(kk)_0 = \frac{3}{2^3}m^2-\frac{51}{2^5}m^3+\frac{543}{2^9}m^4+\frac{2277}{2^{12}}m^5,$$
$$(k'k')_0 = 1+0\,.m-\frac{19}{2^3}m^2+\frac{209}{2^5}m^3-\frac{5109}{2^9}m^4+\frac{89363}{2^{12}.3}m^5,$$
$$(kk)_1 = \frac{25}{2^6}m^4-\frac{5201}{2^9.3.5}m^5,$$
$$(k'k')_{-1} = \frac{3}{2^4}m^2+\frac{1}{2}m^3+\frac{85}{2^6.3}m^4+\frac{4567}{2^{10}.3^2.5}m^5,$$
$$(kk)_{-1} = -\frac{3}{2}m+\frac{159}{2^5}m^2-\frac{2451}{2^8}m^3+\frac{41541}{2^{11}}m^4-\frac{25955}{2^{11}}m^5,$$

$$(k'k')_1 = \frac{3}{2^2} m - \frac{83}{2^5} m^2 + \frac{67}{2^6.3} m^3 - \frac{228125}{2^{11}.3^2} m^4 - \frac{2450305}{2^{13}.3^3} m^5,$$

$$(k'k')_{-2} = \frac{25}{2^8} m^4 + \frac{803}{2^7.3.5} m^5,$$

$$(kk)_{-2} = \frac{9}{2^6} m^2 - \frac{27}{2^7} m^3 + \frac{71}{2^{11}} m^4 - \frac{861}{2^{11}} m^5,$$

$$(k'k')_2 = \frac{27}{2^6} m^3 - \frac{93}{2^8} m^4 - \frac{13}{2^9.5} m^5,$$

$$(kk)_{-3} = \frac{27}{2^{10}} m^4 + \frac{171}{2^{11}} m^5,$$

$$(k'k')_3 = \frac{375}{2^{10}} m^5,$$

correctly to order m^5.

The arithmetical values are as follows:

$$\begin{aligned}
(kk)_0 &= +.00165\ 68,\\
(kk)_1 &= +.00001\ 41,\\
(kk)_2 &= +.00000\ 01,\\
(kk)_{-1} &= -.09302\ 24,\\
(kk)_{-2} &= +.00080\ 37,\\
(kk)_{-3} &= +.00000\ 14,\\
(k'k')_0 &= +.98752\ 58,\\
(k'k')_{-1} &= +.00150\ 88,\\
(k'k')_{-2} &= +.00000\ 59,\\
(k'k')_1 &= +.04328\ 71,\\
(k'k')_2 &= +.00020\ 85,\\
(k'k')_3 &= +.00000\ 14.
\end{aligned}$$

A remark similar to that in the case of the quantities (kk') may be made about the arithmetical work.

Comparison with Delaunay's Results.

From the values of u, s an expression for the longitude may be calculated. On comparison with Delaunay's expression (where, however, the symbol m has a different significance), we find that the two expressions are rendered identical if we replace Delaunay's $\mathring{\gamma}^2$ by

$$K^2\left(1 - \frac{3}{2^3} m^3 - \frac{141}{2^7} m^4 - \frac{3893}{2^9.3} m^5\right).$$

This relation between the constants of integration of the two theories agrees with the similar relation previously obtained from a comparison of the expressions for the latitude.

Third Powers of the Inclination.

We now return to the z equation,

$$(D^2 - m^2)z - \frac{\varkappa z}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

but, since the factor $(us + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ is inconvenient, we eliminate it by means of one of the other equations of motion,

$$(D^2 + 2mD + \tfrac{5}{2}m^2)u + \tfrac{5}{2}m^2 s - \frac{\varkappa u}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Multiplying therefore by u, z and subtracting,

$$D(uDz - zDu) - 2mz\,Du - \tfrac{1}{2}m^2 z(5u + 3s) = 0,$$

and we assume as the solution

$$\begin{aligned} z\sqrt{-1} = {} & a_0 K \Sigma K_j (\zeta^{2j+g} - \zeta^{-2j-g}) \\ & + a_0 K^3 [\Sigma (k^2 k')_j (\zeta^{2j+g} - \zeta^{-2j-g}) \\ & \quad + \Sigma (k^3)_j \ (\zeta^{2j+3g} - \zeta^{-2j-3g})]. \end{aligned}$$

The motion of the node does not depend solely upon the ratio of the mean motions, and the above equations can only be satisfied (to order K^3) by assuming

$$g = g_0 + g_{\gamma^2} K^2,$$

where g_0 is the value of g already calculated and independent of K, and $g_{\gamma^2} K^2$ the correction depending on the square of the inclination.

Calculation of the Quantities $(k^2 k')_i$.

Substituting in the differential equation, and equating the coefficient of ζ^{2j+1+g} to zero, we obtain

$$\Sigma\left[(2i+g_0+g_1K^2)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right]K_ia_{j-i}$$
$$-\tfrac{5}{2}m^2\Sigma K_ia_{i-j-1}$$
$$+K^2\Big\{\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right]K_i(kk')_{j-i}$$
$$-\tfrac{5}{2}m^2\Sigma K_i(kk')_{i-j-1}$$
$$+\Sigma\left[-(2i+g_0)^2+(2j+2i+1+2g_0)^2+2m(2j+2i+1+2g_0)+\tfrac{5}{2}m^2\right]K_i(kk)_{j+i}$$
$$+\tfrac{5}{2}m^2\Sigma K_i(k'k')_{-i-j-1}$$
$$+\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right](k^2k')_ia_{j-i}$$
$$-\tfrac{5}{2}m^2\Sigma(k^2k')_ia_{i-j-1}\Big\}=0,$$

where Σ includes all integral values of i, positive, negative and zero.

In this equation we may equate coefficients of K^0 and K^2 separately to zero. From the coefficient of K^0 we have

$$\sum_i\left[(2i+g_0)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right]K_ia_{j-i}$$
$$-\tfrac{5}{2}m^2\sum_i K_ia_{i-j-1}=0.$$

This equation holds for all integral values of j, thus forming a system of equations from which the quantities K may be determined. Now previously the quantities K were determined from the system

$$(2j+g)^2K_j=2\sum_i M_iK_{i+j}$$

for all integral values of j. The two systems must necessarily be equivalent. To show this, we have from the latter system

$$(2i+g)^2K_ia_{j-i}=2a_{j-i}\sum_{j'}M_{j'-i}K_{j'},$$

hence

$$\sum_i(2i+g)^2K_ia_{j-i}=2\sum_{j'}K_{j'}\sum_i a_{j-i}M_{j'-i}=2\sum_{j'}K_{j'}\sum a_{j-i}M_{i-j'}$$
$$=\sum_{j'}K_{j'}\left[\text{coefficient of }\zeta^{2j-2j'+1}\text{ in }\left(\frac{\varkappa}{r^3}+m^2\right)u\right]$$
$$=\sum_i K_i\left[\text{coefficient of }\zeta^{2j-2i+1}\text{ in }D^2u+2mDu+m^2w+\frac{3m^2}{2}(u+s)\right]$$
$$=\sum_i\left[(2j-2i+1)^2+2m(2j-2i+1)+\tfrac{5}{2}m^2\right]K_ia_{j-i}+\frac{3m^2}{2}\sum K_ia_{i-j-1}.$$

Now this is the former system, and the equivalence is established.

Again from the coefficient of K^2,

$$\begin{aligned}
&\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right]K_i(kk')_{j-i}-\tfrac{5}{2}m^2\Sigma K_i(kk')_{i-j-1}\\
&+\Sigma\left[-(2i+g_0)+(2j+2i+1+2g_0)^2+2m(2j-2i+1+2g_0)+\tfrac{5}{2}m^2\right]K_i(kk)_{j+i}\\
&+\quad\tfrac{5}{2}m^2\Sigma K_i(k'k')_{-i-j-1}\\
&+\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j-2i+1)^2-2m(2j-2i+1)-\tfrac{5}{2}m^2\right](k^2k')_i a_{j-i}\\
&-\quad\tfrac{5}{2}m^2\Sigma(k^2k')_i a_{i-j-1}\\
&+\quad 2g_{\gamma^2}\Sigma(2i+g_0)K_i a_{j-i}=0.
\end{aligned}$$

This is the system of equations from which g_{γ^2} and the quantities (k^2k') must be found.

$(k^2k')_0$ is at our disposal. We make it zero in order to simplify the equations. This is equivalent to defining $2Ka_0$ as the coefficient of the principal periodic term in the value of z correctly as far as the cubes of the inclination. When K has been thus defined, its ratio to Delaunay's γ is determinate to the order of the square of the inclination. Of this ratio the part dependent on m only has already been found.

For a value of j other than zero, the only quantity with a coefficient of order zero is $(k^2k')_j$. The equation (j) therefore determines $(k^2k')_j$. Similarly the equation for which $j=0$ determines g_{γ^2}.

If the quantities (k^2k') be found to the fourth order, the corresponding terms of z are found correctly to the seventh order. This is the degree of accuracy to which we have gone in the first and second powers of the inclination; g_{γ^2} can then be determined to the sixth order. This is one term beyond Delaunay's value. Before however g_{γ^2} is obtained to the sixth order, it is necessary to find $(kk)_0$ to the sixth order. As this has not been done, g_{γ^2} is here given to the fifth order only.

Solving the equations,

$$\begin{aligned}
(k^2k')_{-1} &= -\frac{3}{2^3}m+\frac{85}{2^5}m^2+\frac{281}{2^7.3}m^3+\frac{32509}{2^9.3^2}m^4,\\
(k^2k')_1 &= \qquad\quad -\frac{3}{2^3}m^2-\frac{37}{2^6}m^3-\frac{1063}{2^9.3}m^4,\\
(k^2k')_{-2} &= \qquad\qquad\qquad -\frac{27}{2^7}m^3+\frac{183}{2^8}m^4,\\
(k^2k')_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{25}{2^6}m^4,
\end{aligned}$$

and

$$g_{\gamma^2}=-\frac{3}{2}m^2+\frac{51}{2^4}m^3+\frac{219}{2^7}m^4-\frac{5751}{2^{10}}m^5.$$

If, after substituting the assumed value of z in the differential equation, we had equated to zero the coefficient of $\zeta^{2j+1-\sigma}$, and then proceeded as before, we should have got the equations

$$\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j+2i+1)^2-2m(2j+2i+1)-\frac{5m^2}{2}\right]K_i(kk')_{i+j}$$
$$-\frac{3m^2}{2}\Sigma K_i(kk')_{-i-j-1}$$
$$+\Sigma\left[-(2i+g_0)^2+(2j-2i+1-2g_0)^2+2m(2j-2i+1-2g_0)+\frac{5m^2}{2}\right]K_i(k'k')_{-i+j}$$
$$+\frac{3m^2}{2}\Sigma K_i(kk)_{i-j-1}$$
$$+\Sigma\left[(2i+g_0)^2-(2j+2i+1)^2-2m(2j+2i+1)-\frac{5m^2}{2}\right](k^2k')_i a_{i+j}$$
$$-\frac{3m^2}{2}\Sigma(k^2k')_i a_{-i-j-1}$$
$$+2g_{\gamma^2}\Sigma(2i+g_0)K_i a_{i+j}=0.$$

The quantities (k^2k'), and also g_{γ^2}, may be found from this system of equations, which therefore serve to verify the values already found. Moreover, this system will give g_{γ^2} to the sixth order, without its being necessary to calculate $(kk)_0$ beyond the fifth order.

The value of g_{γ^2} so found is

$$-\frac{3}{2}m^2+\frac{51}{2^4}m^3+\frac{219}{2^7}m^4-\frac{5751}{2^{10}}m^5+\frac{7115}{2^{12}}m^6.$$

The arithmetic values of the quantities are as follows:

$$\begin{aligned}
g_{\gamma^2} &= -.00806\quad 633,\\
(k^2k')_{-1} &= -.01224\quad 0,\\
(k^2k')_1 &= -.00277\quad 8,\\
(k^2k')_{-2} &= -.00008\quad 0,\\
(k^2k')_2 &= -.00002\quad 2,\\
(k^2k')_{-3} &= -.00000\quad 1.
\end{aligned}$$

In this case, in the arithmetical work, the same equations are used as in the algebraical.

The expression for the ratio of the motion of the Moon's node to the Moon's

mean motion, so far as it consists of a series in m multiplied by the square of the inclination, has been computed by Delaunay to be

$$\gamma^2 \left\{ \frac{3}{2} m'^2 - \frac{27}{16} m'^3 - \frac{843}{128} m'^4 - \frac{7185}{1024} m'^5 \right\},$$

where $m' = \frac{m}{1+m}$, and in this paper to be $\frac{g_{\gamma^2}}{1+m} . K^2$, where

$$g_{\gamma^2} = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{51}{2^4} m^3 + \frac{219}{2^7} m^4 - \frac{5751}{2^{10}} m^5 + \frac{7115}{2^{12}} m^6,$$

and where

$$\gamma^2 = K^2 \left(1 - \frac{3}{2^3} m^2 - \frac{141}{2^7} m^4 - \frac{3893}{2^9 . 3} m^5 \ldots\right),$$

or numerically,

$$g_{\gamma^2} = -0.00806\ 633,$$

and the ratio of $\gamma^2 : K^2$ is 0.99974 65, hence

$$-\frac{g_\gamma}{1+m} K^2 = 0.00746\ 483 . \gamma^2.$$

The numerical value of Delaunay's terms is

$$0.00746\ 397\ \gamma^2.$$

The difference is therefore $0.00000\ 086\ \gamma^2$.

Now Delaunay gives $0''7133$ as the daily mean motion corresponding to these terms, and therefore the correction does not exceed $0''0001$. This is the value of the residue of Delaunay's series that might be inferred from the series itself. The correction is small compared with the discrepancy that exists between theory and observation. No large correction could have been expected from the sequence of Delaunay's terms. From Delaunay's complete expressions for the motion of the perigee and node (Comptes Rendus, LXXIV, p. 29), it appears that the series in m multiplied by γ^2 is of more importance in the expression for motion of the perigee than for the node, whereas the series multiplied by e^2 is of more importance for the motion of the node than for the perigee.

Professor E. W. Brown has given (Amer. Jour., vol. XVII) a method of great analytical interest of calculating new parts of the motion of the perigee and node from the coefficients of the period terms already found; for example, g_{γ^2} can by Professor Brown's methods be deduced, by algebraical processes only,

without further reference to the differential equations, from the values of the coefficients a, K, (kk), (kk'), $(k'k')$. The method is an extension of the process whereby Dr. Hill obtained the principal part of the motion of the perigee before calculating any periodic terms other than the variation.

In the equation

$$(D^2 - m^2)\, z - \frac{\varkappa z}{(us + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

we substitute

$$z\sqrt{-1} = \sum_j a_0 \left[KK_j + K^3 (K^2 K')_j\right]\left[\zeta^{2j+g} - \zeta^{-2j-g}\right],$$

where $g = g_0 + g_{\gamma^2} K^2$, and where, in the value of z, terms containing $3g$ in the index are omitted, as they do not affect what follows. Then equating to zero the coefficient of $K^3.\zeta^{2j+g}$, and employing the symbols M defined by

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varkappa}{r^3} + m^2\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} M_i \zeta^{2i},$$

we have

$$2(2j + g_0)\, g_{\gamma^2} K_j + (2j + g_0)^2 (k^2 k')_j - 2\Sigma M_{j-i} (k^2 k')_i$$
$$= \text{coefficient of } K^3.\zeta^{2j+g} \text{ in } \frac{k z_\gamma \sqrt{-1}}{a_0 \left\{ (u_0 + u_{\gamma^2}).(s_0 + s_{\gamma^2}) + z_\gamma^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplying by K_j and summing for all values of j, the coefficient of $(k^2 k')_i$ arising from the second and third terms on the left-hand side is

$$(2i + g_0)^2 K_i - 2\Sigma M_{j-i} K_j,$$

which is zero.

Since $-K_j$ is the coefficient of $K\zeta^{-2j-g}$ in the value of $z_\gamma\sqrt{-1}/a_0$, on the right-hand side we get *half* the coefficient of K^4 in the constant part of the value of $\dfrac{k z_\gamma^2}{a_0^2 \left\{ u_0 s_0 + u_{\gamma^2} s_0 + s_{\gamma^2} u_0 + z_\gamma^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$, the presence of the factor one-half being due to the fact that the same terms arise on considering the coefficients of $K^3 \zeta^{-2j-g}$ and $K\zeta^{2j+g}$. Hence g_{γ^2} is given by the equation

$$4 g_{\gamma^2} \Sigma (2j + g)^2 K_j = \text{const. coeff. of } K^4 \text{ in } \frac{\varkappa z_\gamma^2}{a_0^2 \left\{ u_0 s_0 + u_{\gamma^2} s_0 + s_{\gamma^2} u_0 + z_\gamma^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Were g_{γ^2} determined in this manner, the approximations required to determine the coefficients $(k^2 k')$ would be largely reduced. Moreover the equation that previously determined g_{γ^2} would serve as a useful equation of verification.

But in the first place it may be noticed that this method will only give g_{γ^2} algebraically to the same order that the quantities (kk), (kk'), $(k'k')$ have been calculated, whereas the solution by continued approximation gives its value to one higher order. Possibly a similar objection would hold in a numerical application of the method. Again the arbitrary constants of integration arose from differential equations from which $\varkappa$, the mass of the Earth and Moon, had been eliminated. $\varkappa$ is therefore a function of these constants. On p. 145, Amer. Jour., vol. I, Dr. Hill gives

$$\mu = \varkappa(n-n')^2 = n^2 a_0^3 [1 - \tfrac{1}{8} m^2 + \ldots .]^{-3},$$

but in the higher approximation proceeded to in this paper some terms proportional to K^2 would have to be added to this value. These terms have not been calculated, and it would be unnecessary to calculate them unless it were to apply Prof. Brown's method of computing g_{γ^2}. It would be possible, of course, to replace the arbitrary condition $(kk')_0 = 0$ by the condition that μ shall contain no terms proportional to K^2, but this is merely throwing a heavy piece of work upon an earlier portion of the paper. Moreover, when this has been done, or when the correction to μ has been calculated (whichever alternative is adopted), there still remains the labor of multiplying several series of powers of ζ. The process of solving by continued approximation was indeed long, but it is extremely doubtful whether the practical application of Prof. Brown's method (to the motion of the node at any rate) would not be longer. It must be remembered, too, that the coefficients (k^2k') would still remain to be calculated.

Calculation of the Quantities (k^3).

Substituting in the differential equation, and equating the coefficients of $\zeta^{2j+1\pm 3g}$ to zero, we obtain the equations

$$\sum_i [(3g_0 + 2i)^2 - (2j - 2i + 1)^2 - 2m(2j - 2i + 1) - \tfrac{5}{2} m^2] a_{j-i} (k^3)_i$$
$$- \tfrac{5}{2} m^2 \sum_i a_{i-j-1} (k^3)_i$$
$$+ \sum_i [(g_0 + 2i)^2 - (2j - 2i + 1 + 2g_0)^2 - 2m(2j - 2i + 1 + 2g_0) - \tfrac{5}{2} m^2] K_i (kk)_{j-i}$$
$$- \tfrac{5}{2} m^2 \sum_i K_i (k'k')_{i-j-1} = 0,$$

and

$$\sum_i [(3g_0 + 2i)^2 - (2i + 2j + 1)^2 - 2m(2i + 2j + 1) - \tfrac{5}{2}m^2]\, a_{i+j}(k^3)_i$$
$$- \tfrac{3}{2}m^2 \sum_i a_{-i-j-1}(k^3)_i$$
$$+ \sum_i [(g_0 + 2i)^2 - (2j + 2i + 1 - 2g_0)^2 - 2m(2j + 2i + 1 - 2g_0) - \tfrac{5}{2}m^2]\, K_i (k'k')_{i+j}$$
$$- \tfrac{3}{2}m^2 \sum_i K_i (kk)_{-i-j-1} = 0.$$

In the first of these equations $(k^3)_j$, and in the second $(k^3)_{-j}$, are the only quantities that occur with coefficients of order zero. Hence the equations, as they stand, serve to determine $(k^3)_j$ and $(k^3)_{-j}$ respectively.

In either equation j can be given all integral values, positive and negative. Hence either system will determine all the quantities (k^3); the values of these quantities can then be verified by the other system of equations.

In this way the following results have been obtained:

$$(k^3)_{-1} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{117}{2^5}m^2 - \frac{1575}{2^8}m^3 + \frac{26943}{2^{11}}m^4,$$
$$(k^3)_0 = \frac{3}{2^3}m^2 - \frac{195}{2^7}m^3 + \frac{405}{2^9}m^4,$$
$$(k^3)_{-2} = -\frac{9}{2^5}m^2 + \frac{117}{2^8}m^3 - \frac{1607}{2^{12}}m^4,$$
$$(k^3)_1 = \frac{25}{2^6}m^4,$$
$$(k^3)_{-3} = -\frac{81}{2^9}m^4.$$

The arithmetical results are given below.

$$(k^3)_{-1} = -.06974\ 0,$$
$$(k^3)_0 = +.00168\ 5,$$
$$(k^3)_{-2} = -.00159\ 9,$$
$$(k^3)_1 = +.00001\ 4,$$
$$(k^3)_{-3} = -.00000\ 6.$$

As before, the system of equations was first reduced to a linear system with numerical coefficients. The accuracy required in the coefficient was estimated from the approximate values of the quantities p as given by their algebraic values.

This completes the calculation of the terms involving the first three orders of the inclination.

On Non-uniform Convergence of Infinite Series.

By A. S. Chessin.

A letter received by the author since the appearance of his note "On a Point of the Theory of Functions,"* shows that his statement is liable to be misunderstood, and it is therefore desirable to bring the point out clearer.

The aim was simply to call attention to the fact that between non-uniform convergence and discontinuity there is a connection which has not yet been brought to light, but was rather hidden by the help of an artifice. The proposition enunciated in the note referred to is not intended to be a new theorem; indeed it is nothing but the enunciation of the simple fact that the product of a continuous function and a discontinuous one may be a continuous function. For example, if $\phi(x) = a$ for all values of x in a given interval except for $x = x_0$ and $\phi(x_0) = b \neq a$, the numbers a and b being finite, $(x - x_0)\phi(x)$ will be continuous at $x = x_0$. The character of the function $\phi(x)$ is hidden in the product $(x - x_0)\phi(x)$. So it is with non-uniformly convergent series of the type considered in my previous note. Let

$$f(x) = \sum_1^\infty f_m(x)$$

be convergent for all the values of x in the given interval except for $x = x_0$, for which value this series need not be convergent. The non-uniformly convergent series

$$F(x) = \sum_1^\infty \theta(x) f_m(x)$$

considered in my previous note represents a continuous function if an arbitrarily small but finite number h can be found such that

$$|\theta(x_0 \pm \eta h) f(x_0 \pm \eta h)| < \varepsilon, \tag{1}$$

*See Vol. XVIII, No. 1, p. 98.

where $0 < \eta \leqq 1$. This condition is necessary and sufficient. One way of satisfying this condition would be in having $\sum_1^\infty f_m(x)$ finite in the neighborhood of x_0, whatever be its value for $x = x_0$; another would still remain in letting $f(x)$ tend to become infinite (in a determinate or indeterminate way) as x approaches the value x_0. But this case is reducible to the one just considered. In fact if we put $\phi_m(x) = \frac{f_m(x)}{f(x)}$ and $\vartheta(x) = f(x)\,\theta(x)$, the series

$$\sum_1^\infty \vartheta(x)\,\phi_m(x)$$

will come into the class for which $\sum_1^\infty \phi_m(x)$ remains finite in the neighborhood of $x = x_0$.

If, on the other hand, such a number h for which the relation (1) would be satisfied could not be found, the function $F(x)$ would be discontinuous. But this is only possible if $\sum_1^\infty f_m(x)$ tends to become infinite (in a determinate or indeterminate way), while a reduction to the first class is no more possible.

Dr. W. F. Osgood, of Harvard University, has truly called my attention to the fact that, adding to the series $\sum_1^\infty \theta(x) f_m(x)$ a convergent numerical series, $\sum_1^\infty \alpha_m$, we obtain again a non-uniformly convergent series $\sum_1^\infty \{\alpha_m + \theta(x) f_m(x)\}$ which represents a continuous function if $F(x)$ is continuous; and yet this series is not of the form $\sum_1^\infty \theta(x) f_m(x)$. More generally this can be said about the series

$$\sum_1^\infty {}^m \{\chi_m(x) + \theta(x) f_m(x)\}, \tag{2}$$

where $\sum_1^\infty {}^m \chi_m(x)$ is uniformly convergent. However, the connection between the discontinuity of functions and non-uniform convergence of series is as much concealed in the last series as in those considered before. The fact is, that in all examples that I am aware of, the construction is based on non-uniformly convergent series representing *discontinuous* functions. This seems to indicate that the connection between non-uniform convergence of infinite series and discontinuity of functions is not a casual one, and it would be of the greatest interest to have more light thrown on this point.

On a Certain Class of Equipotential Surfaces.

By B. O. Peirce.

This note discusses the nature of such systems of plane curves as are at once the right sections of possible systems of equipotential cylindrical surfaces belonging to distributions of matter which attract according to the Law of Nature, and the generating curves of possible systems of equipotential surfaces of revolution.

If a given family of analytic cylinders the elements of which are parallel to the axis of z, is a possible system of equipotential surfaces, there must exist a function, $\varpi(x, y)$, which satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

and, all over each member of the family, has a constant value characteristic under obvious limitations of that particular surface. The equation of the family in terms of Cartesian coordinates x, y, z may be written in the form $\varpi(x, y) = c$, where c is a parameter varying from one member of the family to another. In cylinder coordinates, where θ denotes the angle which the perpendicular (y) dropped upon the axis of x from the point (x, y, θ) makes with a fixed plane drawn through this axis, the same equation, $\varpi(x, y) = c$, represents a family of surfaces of revolution. Under what circumstances will these* be a possible system of equipotential surfaces?

Let ξ, η and ζ be any three finite, continuous and single-valued functions of x, y and θ which, when equated to parameters, represent three families of surfaces which cut one another orthogonally, and let ξ, η, ζ be used to define a set

* Since a transformation of coordinates in a plane from one rectangular system to another transforms a pair of conjugate functions into a pair of conjugate functions, the problem is not essentially modified by choosing the axis of x as the axis of rotation.

of curvilinear coordinates, then, if Ω denote the operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{y\,\partial y}+\frac{\partial^2}{y^2.\partial\theta^2}$$

and H the operator

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{y.\partial\theta}\right)^2,$$

the equivalent of Laplace's Equation expressed in terms of ξ, η and ζ is

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}.H(\xi)+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}.H(\eta)+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}.H(\zeta)$$
$$+\frac{\partial V}{\partial\xi}.\Omega(\xi)+\frac{\partial V}{\partial\eta}.\Omega(\eta)+\frac{\partial V}{\partial\zeta}.\Omega(\zeta)=0. \qquad (2)$$

The potential functions due to all possible distributions of any kind of matter which obeys the Law of Nature must, in regions of empty space, satisfy equation (2) and, if the family of surfaces $\xi=c$ is a possible system of equipotential surfaces due to such a distribution, there must exist a function of ξ only which satisfies this equation. It must be possible, then, to write the equation to which (2) reduces when the partial derivatives of V with respect to η and ζ are supposed to vanish, in a form which involves ξ only, and hence it is necessary, and in general sufficient, that $\frac{H(\xi)}{\Omega(\xi)}$ should be expressible as a function of ξ only. In the case before us, therefore, $\varpi(x, y)$ which satisfies (1) and is independent of θ, must be such that $\frac{H(\varpi)}{\Omega(\varpi)}$ is expressible as a function* of ϖ only $\left(\text{say } \frac{1}{F(\varpi)}\right)$, and we have to find the common solutions of the partial differential equations

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\varpi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varpi}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial\varpi}{\partial y}}=\frac{1}{y.F(\varpi)}, \qquad (3)$$

where nothing is as yet known about the nature of the function $F(\varpi)$. We will first show that no common solution of these equations exists unless $F(\varpi)$ has a

* In the special case where $\Omega(\varpi)$ vanishes, $\frac{\partial\varpi}{\partial y}=0$, and hence, by (1), $\varpi=Ax+B$.

special form, and then, after substituting this expression for $F(\varpi)$ in (3), we shall find it easy to solve the simultaneous equations completely.

If $x+yi$ and $x-yi$ be represented by z and z' respectively, the general solution of equation (1) may be written in the form

$$\varpi = \phi(z) + \psi(z'), \tag{4}$$

where ϕ and ψ are arbitrary functions, and if we substitute this value of ϖ in (3) in order to determine which of all the solutions of (1) satisfy (3) also, we shall obtain the equation

$$F(\varpi) = \frac{\psi'(z') - \phi'(z)}{2\phi'(z).\psi'(z').(z-z')}, \tag{5}$$

or

$$2(z-z').F(\varpi) = \frac{1}{\phi'(z)} - \frac{1}{\psi'(z')}. \tag{6}$$

Now x and y are independent variables, and in this transformation either or both may have complex values, so that z and z' are quite independent of each other, and if both members of (6) be differentiated first with respect to z and then with respect to z', the resulting equation will be

$$F''(\varpi).\psi'(z') + \phi'(z)\big((z-z').F'''(\varpi).\psi'(z') - F''(\varpi)\big) = 0, \tag{7}$$

or

$$\frac{F'''(\varpi)}{F''(\varpi)} = \frac{\phi'(z) - \psi'(z')}{\phi'(z).\psi'(z').(z-z')}, \tag{8}$$

and this by the help of (5) may be written

$$F'''(\varpi) = -2F(\varpi).F''(\varpi). \tag{9}$$

Equation (9) is an ordinary differential equation of condition which $F(\varpi)$ must satisfy if we are to expect to find any common solutions of (1) and (3), and if we solve it we shall learn that $F(\varpi)$ must be of the form

$$\frac{\varkappa(\mu e^{2\varkappa\varpi}+1)}{\mu e^{2\varkappa\varpi}-1}, \tag{10}$$

where $\varkappa$ and μ are arbitrary constants.

We shall therefore obtain an equation which every $\phi(z)$ and $\psi(z')$ must satisfy, if their sum is to be a common solution of (1) and (3), by substituting

for ϖ and $F(\varpi)$ in (3) their values as given by (4) and (10). The result of this substitution may be written

$$2\varkappa\mu z e^{2\varkappa\phi(z)} - \frac{\mu e^{2\varkappa\phi(z)}}{\phi'(z)} - \frac{e^{-2\varkappa\psi(z')}}{\psi'(z')} - 2\varkappa z' e^{-2\varkappa\psi(z')}$$
$$= \mu e^{2\varkappa\phi(z)}\left(2\varkappa z' - \frac{1}{\psi'(z')}\right) - e^{-2\varkappa\psi(z')}\left(2\varkappa z + \frac{1}{\phi'(z)}\right). \quad (11)$$

A much simpler equation which $\phi(z)$ and $\psi(z')$ must satisfy may be obtained by differentiating both members of (11), first with respect to z and then with respect to z', and arranging the result in the form

$$\frac{e^{-2\varkappa\psi(z')}.\psi'(z')}{2\varkappa + \frac{\psi''(z')}{(\psi'(z'))^2}} = \frac{\mu e^{2\varkappa\phi(z)}.\phi'(z)}{\frac{\phi''(z)}{(\phi'(z))^2} - 2\varkappa}. \quad (12)$$

The first member of (12) does not involve z and the second member does not involve z'; but z and z' are independent, and the equation can be satisfied for all values of z and z' only if ϕ and ψ are so chosen as to make each member constant.

We have then two ordinary differential equations

$$\frac{\mu\phi'(z).e^{2\varkappa\phi(z)}}{2\varkappa - \frac{\phi''(z)}{(\phi'(z))^2}} = c' \quad (13)$$

and

$$\frac{\psi'(z).e^{-2\varkappa\psi(z')}}{\frac{\psi''(z')}{(\psi'(z'))^2} + 2\varkappa} = -c', \quad (14)$$

which ϕ and ψ must satisfy.

The solutions of these equations are

$$\phi(z) = C + B\log\left[z - n \pm \sqrt{(z-n)^2 - \lambda^2}\right], \quad (15)$$
$$\psi(z') = C' + B\log\left[z' - n' \pm \sqrt{(z'-n')^2 - \lambda'^2}\right], \quad (16)$$

where B, C, C', n, n', λ and λ' are arbitrary, not necessarily real constants, and it follows from this that all the common solutions of (1) and (3) are included in the form

$$\varpi = A + B\log\left\{\left[z - n \pm \sqrt{(z-n)^2 - \lambda^2}\right]\left[z' - n' \pm \sqrt{(z'-n')^2 - \lambda'^2}\right]\right\}, \quad (17)$$

where both of the doubtful signs may be chosen at pleasure. In order to determine whether every expression of this form satisfies the given equations, we may

substitute in (5) the values of $\phi(z)$, $\psi(z')$ and ϖ given by (15), (16) and (17). The condition is that n, n, λ and λ' must be so chosen that

$$\frac{\sqrt{(z-n)^2-\lambda^2}\pm\sqrt{(z'-n')^2-\lambda'^2}}{z-z'}$$

may be expressible as a function of

$$[z-n\pm\sqrt{(z-n)^2-\lambda^2}][z'-n'\pm\sqrt{(z'-n')^2-\lambda'^2}].$$

If the first of these expressions be denoted by v and the second by u, the equation $\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z'}=\frac{\partial u}{\partial z'}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$ will be satisfied when $n=n'$ and $\lambda=\lambda'$ and not otherwise.

Every expression of the form

$$\varpi=A+B\log\{[z-n\pm\sqrt{(z-n)^2-\lambda^2}][z'-n\pm\sqrt{(z'-n)^2-\lambda^2}]\} \tag{18}$$

is, then, a common solution of equations (1) and (3), and we may expect to find all such families of curves as we seek included in the equation

$$[z-n\pm\sqrt{(z-n)^2-\lambda^2}][z'-n\pm\sqrt{(z'-n)^2-\lambda^2}]=c, \tag{19}$$

where z and z' represent $x+yi$ and $x-yi$ respectively and both doubtful signs are to be chosen at pleasure. If we multiply both members of (19) by $[z-n\mp\sqrt{(z-n)^2-\lambda^2}]$ and clear of radicals, we shall obtain the equation

$$4c(\lambda^2-c)^2x^2+4c(\lambda^2+c)^2y^2-8cn(\lambda^2-c)^2x+4cn^2(\lambda^2-c)^2-(\lambda^4-c^2)^2=0. \tag{20}$$

in which all the constants are in general complex; and if in place of c we introduce a new parameter a defined by the equation $c=\lambda^2-2a\pm 2i\sqrt{a(\lambda^2-a)}$ and write l for λ^2, (20) will take the form

$$ax^2+(a-l)y^2-2anx+a(a-l+n^2)=0.$$

THE JEFFERSON PHYSICAL LABORATORY, CAMBRIDGE, MASS., *August*, 1895.

Remarques sur les équations de Dynamique et sur le mouvement tautochrone.

PAR M. MICHEL PETROVITCH *à Belgrade (Serbie).*

Le problème général du mouvement d'un point mobile, des coordonnées ξ, η, ζ soumis à des liaisons et à l'action des forces, dont la résultante, ainsi que les liaisons, dépend algébriquement de la position du point mobile, des composantes de la vitesse et pouvant varier explicitement avec le temps d'une manière quelconque, peut se ramener toujours, en posant

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z}$$

à l'intégration de trois équations simultanées du second ordre

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=s} f_i(t)\, x^{l_i} y^{m_i} z^{n_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu_i} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^{k_i} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{i=s'} \phi_i(t)\, x^{l'_i} y^{m'_i} z^{n'_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda'_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu'_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu'_i} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^{k'_i} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{i=s''} \psi_i(t)\, x^{l''_i} y^{m''_i} z^{n''_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda''_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu''_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu''_i} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^{k''_i} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où f_i, ϕ_i, ψ_i sont des fonctions données de t, et les exposants

$$l_i,\ m_i,\ n_i,\ l'_i,\ m'_i,\ n'_i,\ \ldots,$$
$$\lambda_i,\ \mu_i,\ \nu_i,\ \lambda'_i,\ \mu'_i,\ \nu'_i,\ \ldots,$$

des entiers positifs ou nuls.

Formons les $4(s + s' + s'')$ nombres entiers et positifs suivants

$$\left\{\begin{aligned}
L_i &= l_i + \lambda_i + k_i,\\
M_i &= m_i + \mu_i,\\
N &= n_i + \nu_i,\\
P_i &= \lambda_i + 2k_i + \mu_i + \nu_i,
\end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots s,$$

$$\left.\begin{cases} L_i' = l_i' + \lambda_i' + k_i', \\ M_i' = m_i' + \mu_i', \\ N_i' = n_i' + \nu_i', \\ P_i' = \lambda_i' + 2k_i' + \mu_i' + \nu_i', \end{cases}\right\} i = 1, 2, \ldots . s',$$

$$\left.\begin{cases} L_i'' = l_i'' + \lambda_i'' + k_i'', \\ M_i'' = m_i'' + \mu_i'', \\ N_i'' = n_i'' + \nu_i'', \\ P_i'' = \lambda_i'' + 2k_i'' + \mu_i'' + \nu_i'' \end{cases}\right\} i = 1, 2, \ldots . s''$$

et au moyen d'eux les

$$\frac{3ss's''(s-1)(s'-1)(s''-1)}{8}$$

quotients de déterminants suivants

$$\Delta_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'') = \frac{\begin{vmatrix} P_\alpha - P_\beta & M_\alpha - M_\beta & N_\alpha - N_\beta \\ P_\alpha' - P_\beta' & M_\alpha' - M_\beta' & N_\alpha' - N_\beta' \\ P_\alpha'' - P_\beta'' & M_\alpha'' - M_\beta'' & N_\alpha'' - N_\beta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_\alpha - L_\beta & M_\alpha - M_\beta & N_\alpha - N_\beta \\ L_\alpha' - L_\beta' & M_\alpha' - M_\beta' & N_\alpha' - N_\beta' \\ L_\alpha'' - L_\beta'' & M_\alpha'' - M_\beta'' & N_\alpha'' - N_\beta'' \end{vmatrix}},$$

$$\Delta_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'') = \frac{\begin{vmatrix} L_\alpha - L_\beta & P_\alpha - P_\beta & N_\alpha - N_\beta \\ L_\alpha' - L_\beta' & P_\alpha' - P_\beta' & N_\alpha' - N_\beta' \\ L_\alpha'' - L_\beta'' & P_\alpha'' - P_\beta'' & N_\alpha'' - N_\beta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_\alpha - L_\beta & M_\alpha - M_\beta & N_\alpha - N_\beta \\ L_\alpha' - L_\beta' & M_\alpha' - M_\beta' & N_\alpha' - N_\beta' \\ L_\alpha'' - L_\beta'' & M_\alpha'' - M_\beta'' & N_\alpha'' - N_\beta'' \end{vmatrix}},$$

$$\Delta_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'') = \frac{\begin{vmatrix} L_\alpha - L_\beta & M_\alpha - M_\beta & P_\alpha - P_\beta \\ L_\alpha' - L_\beta' & M_\alpha' - M_\beta' & P_\alpha' - P_\beta' \\ L_\alpha'' - L_\beta'' & M_\alpha'' - M_\beta'' & P_\alpha'' - P_\beta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_\alpha - L_\beta & M_\alpha - M_\beta & N_\alpha - N_\beta \\ L_\alpha' - L_\beta' & M_\alpha' - M_\beta' & N_\alpha' - N_\beta' \\ L_\alpha'' - L_\beta'' & M_\alpha'' - M_\beta'' & N_\alpha'' - N_\beta'' \end{vmatrix}}$$

obtenus de la manière suivante. En laissant fixes les indices α', β', α'', β'' on fait varier l'ensemble de deux indices α, β, en les remplaçant successivement par toutes les combinaisons deux à deux, sans répétition, de s indices figurant dans la première des équations (1). Dans chacun de $\frac{s(s-1)}{2}$ déterminants ainsi obtenus

on laisse fixes les indices $\alpha, \beta, \alpha'', \beta''$ et l'on fait varier l'ensemble de deux indices (α', β'), en le remplaçant par toutes les combinaisons deux à deux de s' indices figurant dans la seconde des équations (1). Enfin, dans chacun des $\frac{s(s-1)}{2} \cdot \frac{s'(s'-1)}{2}$ déterminants ainsi obtenus, on laisse fixes les indices $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et l'on fait varier l'ensemble (α'', β''), en le remplaçant successivement par toutes les combinaisons deux à deux de s'' indices qui figurent dans la troisième des équations (1).

Appelons, pour abréger, *le groupe* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ l'ensemble de trois nombres commensurables $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ définis précédemment et correspondant tous les trois à même ensemble d'indices $(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'')$. Le nombre de tels groupes sera, d'après leur formation, égal à

$$\frac{s(s-1)}{2} \cdot \frac{s'(s'-1)}{2} \cdot \frac{s''(s''-1)}{2} = \frac{ss's''(s-1)(s'-1)(s''-1)}{8}.$$

Distinguons, parmi tous ces groupes, ceux qui satisfont à cette double condition

1°. Chacun des trois termes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, dont il se compose, est négatif ou se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

2°. Chacune des $s + s' + s'' - 6$ expressions suivantes

$$\begin{aligned}
&(L_\kappa - L_\alpha)\,\Delta_1 + (M_\kappa - M_\alpha)\,\Delta_2 + (N_\kappa - N_\alpha)\,\Delta_3 - (P_\kappa - P_\alpha),\\
&(L'_\kappa - L'_\alpha)\,\Delta_1 + (M'_\kappa - M'_\alpha)\,\Delta_2 + (N'_\kappa - N'_\alpha)\,\Delta_3 - (P'_\kappa - P'_\alpha),\\
&(L''_\kappa - L''_\alpha)\,\Delta_1 + (M''_\kappa - M''_\alpha)\,\Delta_2 + (N''_\kappa - N''_\alpha)\,\Delta_3 - (P''_\kappa - P''_\alpha),
\end{aligned}$$

est positive ou nulle, ces expressions étant formées de la manière suivante : dans la première on donne à k toutes les valeurs entières de 1 à s sauf α et β ; dans la seconde on donne à k toutes les valeurs entières de 1 à s' sauf α' et β' ; dans la troisième on lui donne toutes les valeurs entières de 1 à s'' sauf α'' et β''.

La recherche des groupes satisfaisant à ces conditions, et que j'appellerai, pour abréger le langage : *groupes remarquables* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, peut s'effectuer toujours sur les équations (1) elles-mêmes, et l'on peut les considérer comme donnés à l'avance. On pourrait, d'ailleurs, se servir, pour leur définition, d'une locution géométrique, généralisant celle qu'on emploie dans le procédé connu de Newton, dans l'étude des courbes algébriques au voisinage d'un point singulier. Il peut aussi arriver que les équations (1) n'admettent aucun groupe remarquable $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$.

Ceci posé, supposons les équations (1) du mouvement intégrées; on aura x, y, z, et par suite ξ, η, ζ en fonction du temps t et de six constantes d'intégration, pour lesquelles on peut prendre: les trois coordonnées définissant la position initiale du mobile et les trois composantes de la vitesse initiale.

Soit $t = t_1$ la valeur du temps employé par le mobile pour aller de la position initiale à l'origine des coordonnées; cette valeur dépendra généralement des conditions initiales et varie avec elles, sauf les cas remarquables du tautochronisme du mouvement par rapport à l'origine.

Les valeurs telles que $t = t_1$, sont racines communes à trois équations $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, et par conséquent, ce sont les infinis communs à x, y, z. Mais ces infinis peuvent être

(a) pôles de x, y, z, c'est-à-dire, points ordinaires de ξ, η, ζ;

(b) points critiques algébriques de x, y, z, et par suite aussi de ξ, η, ζ;

(c) singularités transcendantes de x, y, z et de ξ, η, ζ, points critiques logarithmiques, points essentiels, etc.

Je me propose de démontrer le théorème suivant:

Toutes les fois que les équations (1) *du mouvement n'admettent aucun groupe remarquable* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, *l'une ou l'autre des conditions suivantes est certainement remplie*:

1° *ou bien les valeurs telles que* $t = t_1$ *sont singularités* TRANSCENDANTES *de* ξ, η, ζ, *variant avec les données initiales;*

2° *ou bien le mouvement est tautochrone par rapport à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire, le temps employé par le mobile pour aller d'un point quelconque à l'origine, ne varie pas avec les données initiales.*

Pour démontrer le théorème, remarquons que si $t = t_1$ était une singularité algébrique de x, y, z, on aurait au voisinage de cette valeur

$$x = (t - t_1)^{r_1} F(t),$$
$$y = (t - t_1)^{r_2} \Phi(t),$$
$$z = (t - t_1)^{r_3} \Psi(t),$$

où F, Φ, Ψ sont fonctions de t et des constantes d'intégration, restant finies et différentes de zéro au voisinage immédiat de $t = t_1$, et r_1, r_2, r_3 étant des constantes négatives. Les équations (1) deviennent alors

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=s} f_i(t)(t-t_1)^{L_i r_1 + M_i r_2 + N_i r_3 - P_i}\,[r_1 F + (t-t_1)\quad F']^{\lambda_i}[r_2\Phi + (t-t_1)\Phi']^{\mu_i}\\
&\qquad \times [r_3\Psi + (t-t_1)\Psi']^{\nu_i}[r_1(r_1-1)F + 2r_1(t-t_1)F' + (t-t_1)^2 F'']^{k_i} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{i=s'} \phi_i(t)(t-t_1)^{L_i' r_1 + M_i' r_2 + N_i' r_3 - P_i'}\,[r_1 F + (t-t_1)\quad F']^{\lambda_i}[r_2\Phi + (t-t_1)\Phi']^{\mu_i}\\
&\qquad \times [r_3\Psi + (t-t_1)\Psi']^{\nu_i}[r_2(r_2-1)\Phi + 2r_2(t-t_1)\Phi' + (t-t_1)^2\Phi'']^{k_i'} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{i=s''} \psi_i(t)(t-t_1)^{L_i'' r_1 + M_i'' r_2 + N_i'' r_3 - P_i''}\,[r_1 F + (t-t_1)\,F']^{\lambda_i}[r_2\Phi + (t-t_1)\Phi']^{\mu_i}\\
&\qquad \times [r_3\Psi + (t-t_1)\Psi']^{\nu_i}[r_3(r_3-1)\Psi + 2r_3(t-t_1)\Psi' + (t-t_1)^2\Psi'']^{k_i''} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Je dis d'abord que s'il n'existe aucun groupe remarquable $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, parmi les trois équations (2) il y en a au moins une dans laquelle le terme ayant le plus petit exposant de $(t-t_1)$ est unique.

En effet, supposons que dans chacune des équations (2) il y a deux ou plusieurs termes ayant les exposants de $(t-t_1)$ égaux entre eux et plus petits que tous les autres dans la même équation; soient α, β les indices des ces deux termes dans la première des équations (2); α', β' ceux de la seconde et α'', β'' ceux de la troisième. On aurait d'abord

$$\begin{aligned}
L_\alpha r_1 + M_\alpha r_2 + N_\alpha r_3 - P_\alpha &= L_\beta r_1 + M_\beta r_2 + N_\beta r_3 - P_\beta,\\
L'_{\alpha'} r_1 + M'_{\alpha'} r_2 + N'_{\alpha'} r_3 - P'_{\alpha'} &= L'_{\beta'} r_1 + M'_{\beta'} r_2 + N'_{\beta'} r_3 - P'_{\beta'},\\
L''_{\alpha''} r_1 + M''_{\alpha''} r_2 + N''_{\alpha''} r_3 - P''_{\alpha''} &= L''_{\beta''} r_1 + M''_{\beta''} r_2 + N''_{\beta''} r_3 - P''_{\beta''}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= \Delta_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''),\\
r_2 &= \Delta_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''),\\
r_3 &= \Delta_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''),
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 étant définis précédemment.

Ensuite il faut que dans la première des équations (2) aucun exposant de $(t-t_1)$ ne soit plus petit que celui correspondant à l'indice α; que dans la seconde aucun exposant ne soit plus petit que celui correspondant à l'indice α', et enfin, que dans la troisième aucun ne soit plus petit que celui correspondant à l'indice α''. Il faut donc que

$$\left.\begin{aligned}
(L_\kappa - L_\alpha)\,r_1 + (M_\kappa - M_\alpha)\,r_2 + (N_\kappa - N_\alpha)\,r_3 - (P_\kappa - P_\alpha) &\geqslant 0,\\
(L'_\kappa - L'_\alpha)\,r_1 + (M'_\kappa - M'_\alpha)\,r_2 + (N'_\kappa - N'_\alpha)\,r_3 - (P'_\kappa - P'_\alpha) &\geqslant 0,\\
(L''_\kappa - L''_\alpha)\,r_1 + (M''_\kappa - M''_\alpha)\,r_2 + (N''_\kappa - N''_\alpha)\,r_3 - (P''_\kappa - P''_\alpha) &\geqslant 0,
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

lorsqu'on y remplace r_1, r_2, r_3 par leurs valeurs (3) et lorsqu'on donne à k: dans la première des expressions (4), toutes les valeurs entières de 1 à s sauf α, β;

dans la seconde toutes les valeurs entières de 1 à s' sauf α', β', et enfin dans la troisième toutes les valeurs entières de 1 à s'' sauf α'', β''.

Or, les constantes r_1, r_2, r_3 étant négatives, les égalités (3) et les inégalités (4) montrent que le groupe $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, correspondant à l'ensemble d'indices $(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'')$ devrait être un groupe remarquable. Si donc les équations (1) du mouvement n'admettent aucun groupe pareil, ainsi qu'on l'a supposé, parmi les trois équations (2) il y en a au moins une dans laquelle le terme ayant le plus petit exposant de $(t - t_1)$ est unique. Supposons que cela soit la première des équations (2) [le raisonnement serait le même avec l'une quelconque d'elles], et que le terme à plus petit exposant de $(t - t_1)$ corresponde à l'indice k. On voit facilement que dans le voisinage immédiat de $t = t_1$ le premier membre de l'équation peut se mettre sous la forme

$$(t - t_1)^{L_\kappa r_1 + M_\kappa r_2 + N_\kappa r_3 - P_\kappa} \left[A_\kappa f_\kappa(t) F(t)^{\lambda_\kappa + k_\kappa} \Phi(t)^{\mu_\kappa} \Psi(t)^{\nu_\nu} + (t - t_1)\Theta\right] \tag{5}$$

où

$$A_\kappa = r_1^{\lambda_\kappa + k_\kappa} (r_1 - 1)^{k_\kappa} r_2^{\mu_\kappa} r_3^{\nu_\kappa}$$

et Θ étant un polynome en $(t - t_1)$, F, F', F'', Φ, Φ', Ψ, Ψ' et en tous les $f_i(t)$ sauf $f_\kappa(t)$.

Mais l'expression (5) doit être identiquement nulle pour $t = t_1$ et pour une valeur quelconque de t dans le voisinage de $t = t_1$, car cette expression est le résultat de substitution dans le premier membre de la première équation (1) de x, y, z par des intégrales générales des ces équations.

D'après cela, pour une valeur quelconque de t au voisinage de $t = t_1$ et aussi pour $t = t_1$ on aura identiquement

$$A_\kappa f_\kappa(t) F(t)^{\lambda_\kappa + k_\kappa} \Phi(t)^{\mu_\kappa} \Psi(t)^{\nu_\kappa} + (t - t_1)\Theta = 0.$$

Or, pour $t = t_1$ les fonctions F, Φ, Ψ restent finies et différentes de zéro; donc si aucune des fonctions $f_i(t)$, qui figurent dans Θ, ne devient infinie pour $t = t_1$, on aura

$$A_\kappa f_\kappa(t_1) F(t_1)^{\lambda_\kappa + k_\kappa} \Phi(t)^{\mu_\kappa} \Psi(t_1)^{\nu_\kappa} = 0$$

et comme $F(t_1)$, $\Phi(t_1)$, $\Psi(t_1)$ ne sont pas nuls, il faut que

$$f_\kappa(t_1) = 0,$$

à moins qu'une des fonctions $f_i(t)$ ne devienne infinie pour $t = t_1$. En tous cas la valeur $t = t_1$ est soit une racine de l'équation $f_\kappa(t) = 0$, soit un infini d'une quelconque des fonctions $f_i(t)$, autre que $f_\kappa(t)$.

Donc t_1 ne varie pas avec les données initiales.

On déduit, en même temps, de ce qui précède, le résultat suivant.

Toutes les fois que les valeurs de t, représentant le temps employé par le mobile pour aller d'une position initiale à l'origine des coordonnées, varient avec les données initiales, l'une ou l'autre des conditions suivantes sera certainement remplie :

1° ou bien ces valeurs de t sont des singularités transcendantes mobiles des coordonnées ξ, η, ζ du point mobile ;

2° ou bien les équations (1) admettent au moins un groupe remarquable $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, et alors ces valeurs de t sont des zéros communs à ξ, η, ζ, d'un ordre infinitésimal égal aux termes respectifs d'un de ces groupes, ne se présentant pas sous la forme $\frac{0}{0}$, changés de signe.

Il s'en suit aussi la conséquence suivante :

Toutes les fois que les équations du mouvement (1) n'admettent aucun groupe remarquable, et qu'elles s'intégrent par des fonctions uniformes du temps sans points essentiels mobiles, ou par des fonctions algébriques du temps, ou par des fonctions algébriques d'autres fonctions uniformes sans points essentiels, le mouvement est tautochrone par rapport à l'origine des coordonnées.

2. Nous avons examiné jusqu'à présent les cas où les équations (1) n'admettent pas de groupes remarquables. Supposons maintenant qu'elles en admettent, mais *que dans aucun des tels groupes il n'y a de termes* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *plus petits que* 2 *en valeur absolue ou ayant la forme* $\frac{0}{0}$. Désignons par

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1\left(t, \xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) &= 0,\\
\chi_2\left(t, \xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) &= 0,\\
\chi_3\left(t, \xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

les transformées en ξ, η, ζ des équations (1), mises sous forme de polynomes en ξ, η, ζ et leurs derivées ; ensuite par

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1\left(t, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}\right),\\
&\theta_2\left(t, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\eta}{dt^2}\right),\\
&\theta_3\left(t, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

les ensembles de termes dans les polynomes χ_1, χ_2, χ_3 indépendants de ξ, η, ζ, et *supposons que, t variant de $t = t'$ jusqu'à $t = t''$, les trois équations*

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0$$

ne soient satisfaites pour aucun systeme de valeurs réelles de

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Désignons, comme précédemment, par $t = t_1$ le temps employé par le mobile pour arriver à l'origine des coordonnées. Je dis que

1° *ou bien $t = t_1$ est une singularité transcendante mobile de ξ, η, ζ;*

2° *ou bien on a le résultat suivant: le mobile, quelles que soient les conditions initiales, ne peut arriver à l'origine dans un intervalle de temps $(0, t_1)$, plus petit que l'intervalle $(0, t'')$ et plus grand que l'intervalle $(0, t')$, que si la valeur $t = t_1$ ne varie pas avec les données initiales et rend infinie au moins l'une des fonctions explicites du temps figurant dans les équations* (6).

Car, si la valeur $t = t_1$ n'est pas une singularité transcendante de ξ, η, ζ, et si elle varie avec les données initiales, on aura dans son voisinage

$$\begin{aligned} x &= (t - t_1)^{r_1} F(t), \\ y &= (t - t_1)^{r_2} \Phi(t), \\ z &= (t - t_1)^{r_3} \Psi(t), \end{aligned}$$

où F, Φ, Ψ sont des fonctions finies et différentes de zéro pour $t = t_1$, et où r_1, r_2, r_3 sont des constantes négatives, égales—en vertu de la proposition du numéro précédent—aux termes d'un groupe remarquable des équations (1), et par suite plus petits en valeur absolue que 2. Il s'en suit que les dérivées premières et secondes de ξ, η, ζ seront finies pour $t = t_1$ et leurs valeurs pour $t = t_1$ seront liées par les trois équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0. \tag{8}$$

Or, ces équations ne donnent pas pour les composantes de vitesse et de l'accélération de valeurs réelles, ce qui montre que le mobile ne peut pas passer par l'origine à une époque $t = t_1$ telle qu'on ait $t' < t_1 < t''$, à moins que la valeur $t = t_1$ ne rende infinie l'une des fonctions explicites de t figurant dans χ_1, χ_2, χ_3, dans quel cas t_1 est fixe et les équations (6) peuvent ne pas se réduire aux équations (8).

On en tire le corollaire suivant:

Les conditions précédentes étant supposées remplies et aucune fonction explicite de t, figurant dans les équations (6) ne devenant infinie pour des valeurs de t comprises entre t' et t'', toutes les fois que les coordonnées du point s'expriment par des fonctions uniformes du temps sans points essentiels mobiles, ou par des fonctions algébriques du temps, ou par des fonctions algébriques d'autres fonctions uniformes de t, le mobile, quelles que soient les conditions initiales, ne peut pas arriver à l'origine des coordonnées dans un intervalle de temps plus petit que $t'' - t'$, le temps $t = t'$ étant pris comme origine de temps.

Ajoutons encore la remarque suivante, relative aux cas, où les équations du mouvement (1) s'intègrent par des fonctions uniformes du temps, sans points essentiels mobiles.

Soit (τ', τ'') un intervalle de temps tel que, t variant de τ' jusqu'à τ'' chacune des quantités $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, définies comme racines des trois équations (8), soit réelle [si l'une d'elles n'était pas réelle, le mobile, d'après ce qui précède, ne passerait pas par l'origine dans l'intervalle de temps considéré] et garde constamment un même signe.

Si t variant de τ' à τ'' le mobile ne s'éloigne pas indéfiniment de l'origine (reste constamment à distance finie à l'origine), il ne pourra, quelles que soient les conditions initiales, passer plus d'une fois par l'origine pendant cet intervalle de temps.

Car si $t = \alpha$ et $t = \beta$ étaient deux époques consécutives du passage du mobile par l'origine, comprises dans l'intervalle (τ', τ''), les trois produits

$$\frac{d\xi(\alpha)}{dt}\,\frac{d\xi(\beta)}{dt},\quad \frac{d\eta(\alpha)}{dt}\,\frac{d\eta(\beta)}{dt},\quad \frac{d\zeta(\alpha)}{dt}\,\frac{d\zeta(\beta)}{dt},$$

devraient, d'après le théorème de Rolle, être négatifs, à moins que ξ, η, ζ ne deviennent infinis pour une valeur de t comprises dans l'intervalle (τ', τ''). Mais ces produits ne peuvent être négatifs, puisque les équations (8) donnent pour chacune des derivées $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ les résultats de même signe dans tout l'étendue de l'intervalle (τ', τ'').

Dans certains cas généraux on peut affirmer que le mobile reste constamment à distance finie à l'origine. Il en sera p. ex. ainsi toutes les fois que les équations (6) n'admettent aucun groupe remarquable.

Enfin, sans faire aucune hypothèse sur les équations du mouvement et sur la nature analytique des fonctions, par lesquelles elles s'intègrent, on peut faire la remarque suivante.

Faisons dans ces équations

$$\xi = x' + a, \quad \eta = y' + b, \quad \zeta = z' + c.$$

S'il est possible de choisir les constantes a, b, c de manière que dans les trois équations en x', y', z' et leurs dérivées, ainsi obtenues, les ensembles de termes indépendants de x', y', z' ne soient satisfaits car aucun système de valeurs réelles de

$$\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2},$$

le mobile ne peut arriver à la position $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$ avec une vitesse et une accélération finies qu'au bout d'un certain temps, qui ne varie pas avec les conditions initiales. Et si le temps ne figure pas explicitement dans les équations, le mobile ne passera jamais par ce point avec une vitesse et une accélération finies.

Note on C. S. Peirce's Paper on "A Quincuncial Projection of the Sphere."

By James Pierpont, *New Haven, Conn.*

In the second volume of this journal* Professor C. S. Peirce called attention to a very elegant representation of the sphere on the plane by means of the function $\operatorname{cn}\left(z, \varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Let θ, l, p be the longitude, latitude, and north polar distance resp. of a point P on the sphere. If $\zeta = \xi + i\eta$ be the stereographic projection of this point on the equatorial plane ("ζ-plane"), we have

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \tan\frac{p}{2} \cdot e^{i\theta}.$$

Let now $\zeta = \operatorname{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; the ζ-plane and thus the sphere itself is conformally represented on the "z-plane." Being given ζ, it is not difficult to find formulæ for determining the coordinates of z and thus follow the movements of P in the z-plane.

The formulæ given by Prof. Peirce for this purpose are

$$x_\kappa = \tfrac{1}{2} F(\phi), \tag{1}$$

where x_κ is *one* of the coordinates of $z = x + iy$,

$$\cos^2\phi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 l \cos^2\theta} - \sin l}{1 + \sqrt{1 - \cos^2 l \cos^2\theta}}, \tag{2}$$

and as usual

$$F(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\phi}}.$$

There seems to be an error in this determination, however, as may be seen in

*C. S. Peirce, "A Quincuncial Projection of the Sphere." *American Journal of Mathematics*, Vol. II (1879), p. 394.

taking special values of l and θ. For example, for $l=\theta=0$ we have $\zeta=1$, whence $z\equiv 0$ (mod. $4K$, $2K(1+\iota)$), so that

$$x\equiv y\equiv 0. \tag{3}$$

The formulæ (1), (2), however, require that

$$x_\kappa\equiv\frac{K}{2} \qquad (\text{mod. } K),$$

which contradicts (3).

Expressions for x, y may be determined as follows:* Let $u=x+iy$, $v=x-\iota y$; then $u+v=2x$, $u-v=2iy$ and

$$\operatorname{cn} 2x=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Now $\operatorname{cn} u=\rho e^{\iota\theta}$, whence $\operatorname{cn} v=\rho e^{-\iota\theta}$. Similarly let

$$\operatorname{sn} u=\rho_1 e^{\iota\theta_1}, \quad \operatorname{dn} u=\rho_2 e^{\iota\theta_2},$$

so that

$$\operatorname{sn} v=\rho_1 e^{-\iota\theta_1}, \quad \operatorname{dn} v=\rho_2 e^{-\iota\theta_2},$$

whence

$$\operatorname{cn} 2x=\frac{\rho^2-\rho_1^2\rho_2^2}{1-\frac{1}{2}\rho_1^4} \tag{4}$$

and

$$\operatorname{cn} 2y=\frac{1-\frac{1}{2}\rho_1^4}{\rho^2+\rho_1^2\rho_2^2}. \tag{5}$$

But

$$\rho_1^4=\frac{4(1-\cos^2\theta\cos^2 l)}{(1+\sin l)^2}, \quad \rho_2^4=\frac{1-\sin^2\theta\cos^2 l}{(1+\sin l)^2}.$$

Thus introducing the angles α, β, the equations (4), (5) give

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cn} 2x&=\frac{\cos^2 l-2\sqrt{\sin^2 l+\frac{1}{4}\cos^4 l\sin^2 2\theta}}{2\sin l+\cos^2 l\cos 2\theta}=\cos\alpha,\\ \operatorname{cn} 2y&=\frac{2\sin l+\cos^2 l\cos 2\theta}{\cos^2 l+2\sqrt{\sin^2 l+\frac{1}{4}\cos^4 l\sin^2 2\theta}}=\cos\beta,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

whence

$$x=\tfrac{1}{2}F(\alpha), \quad y=\tfrac{1}{2}F(\beta). \tag{7}$$

The corresponding formulæ expressing ξ, η in terms of x, y are

$$\xi=\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y}{1-\operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x}, \quad \eta=-\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{1-\operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x}. \tag{8}$$

Before computing the coordinates of z for a point P on the sphere, it is well to see what general correspondence exists between the z-plane and the sphere.

---

*Cf. Richelot, "Darstellung einer beliebigen Grösse durch sinam $(u+w, k)$." Crelle, Vol. 45. Durège, "Theorie der elliptischen Functionen." 4th ed. Leipzig, 1887, p. 289.

Figure 1 represents the stereographic projection of the sphere on the ζ-plane. The inner circle, α, has a radius $=1$; the outer circle, β, has an infinite radius; to them correspond on the sphere resp. the equator and an infinitely small circle about the south pole. Points on the northern hemisphere are projected within α, points on the southern hemisphere without α.

The point α_0 represents the N-pole. The eight lines passing through α_0 and β_1, β_2 .... represent the eight meridian circles whose longitudes are resp. $\theta = 0°, 45°, 90°$ .... For shortness I shall designate any line by its terminal points; thus $(\alpha_2 \alpha_4)$ denotes for example the arc of α terminated by α_2, α_4. Similarly $\{....\}$ shall represent a surface bounded by lines of the figure passing through the points within $\{\ \}$.

Let us now turn to the correspondence between the ζ- and z-plane. The parallelogram $\Pi = \{ABCD\}$ in Fig. 2 being an elementary parallelogram of periods of the function $\mathrm{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, a point of the ζ-plane is represented by two points z_1, z_2 in Π. Since $z_1 + z_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 4K,\ 2K(1+i))$, the points z_1, z_2 are symmetrical with respect to a_3 as a center. This shows that $\{DBC\}$ or $\{DAB\}$ represents once and only once every point in the ζ-plane, and conversely. Instead, however, of employing Π to represent the ζ-plane, we may use the square $\Sigma = \{A'B'C'D'\}$. It consists of four lesser squares $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$, the first two having a_0, i_2 resp. for centers. As the point a_3 is a center of symmetry (in the afore sense) the ζ-plane is represented once only by $\Sigma' = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Thus corresponding to a point on the sphere there exists one point only in Σ', and conversely. Further to the N-hemisphere corresponds Σ_1 and to the S-hemisphere corresponds Σ_2; the equator is thus represented by the perimeters a, a' of Σ_1, Σ_2.

The point a_0 represents the N-pole, i_2 the S-pole. In general, corresponding points in the two planes are marked by the same letters and suffixes; points in the ζ-plane bearing Greek letters, and those of the z-plane, Latin. Finally, when ζ moves on any line marked in Fig. 1, z moves in Fig. 2 on corresponding lines. Between the points of a surface σ enclosed by such a path of ζ and the points of the corresponding surface s in the z-plane, there exists $1-1$ correspondence. In particular, the squares Σ_1, Σ_2 are divided into 16 triangles t, as e. g. $\{a_0 a_1 a_3\}$, to each of which corresponds an $\frac{1}{8}$ of a hemisphere. The proof of these statements I will illustrate for one or two cases.

For example, to see that when z describes $(a_0 a_7)$, ζ describes continuously

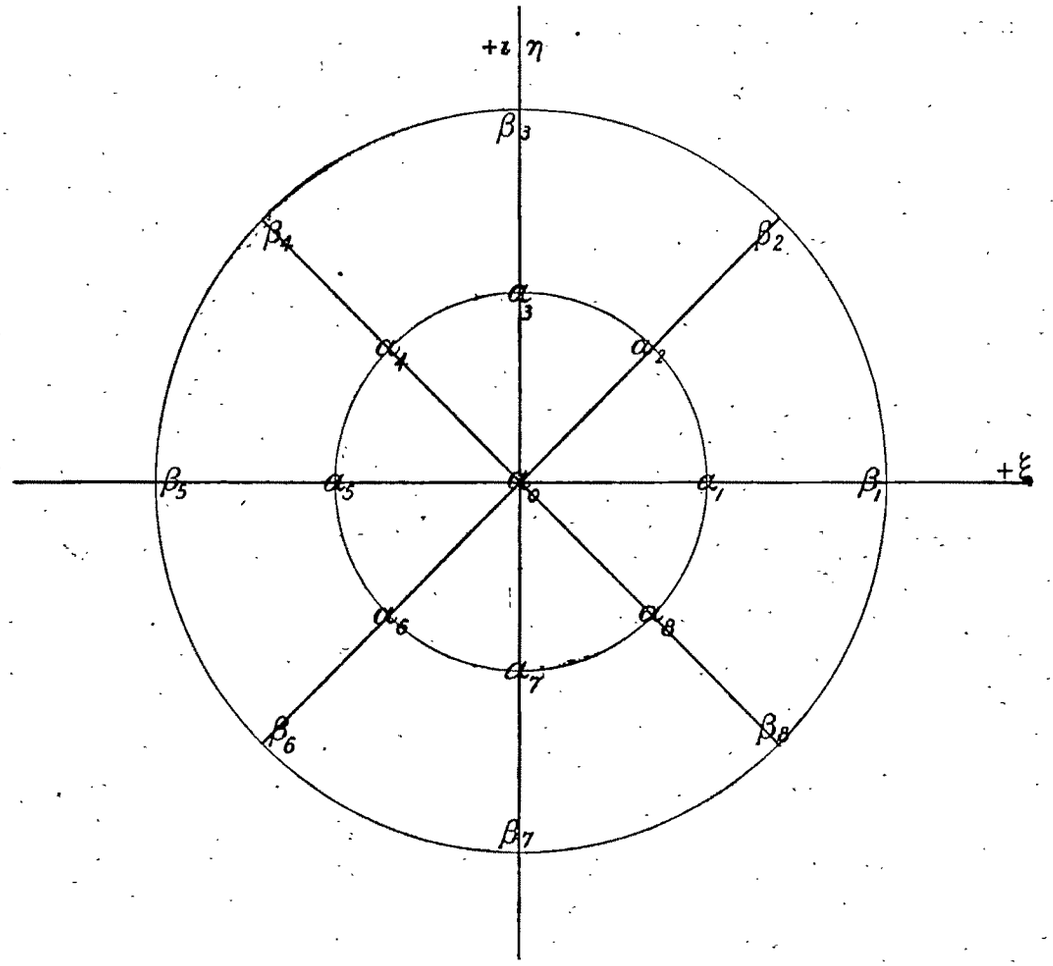


FIG. 1.—ζ-plane.

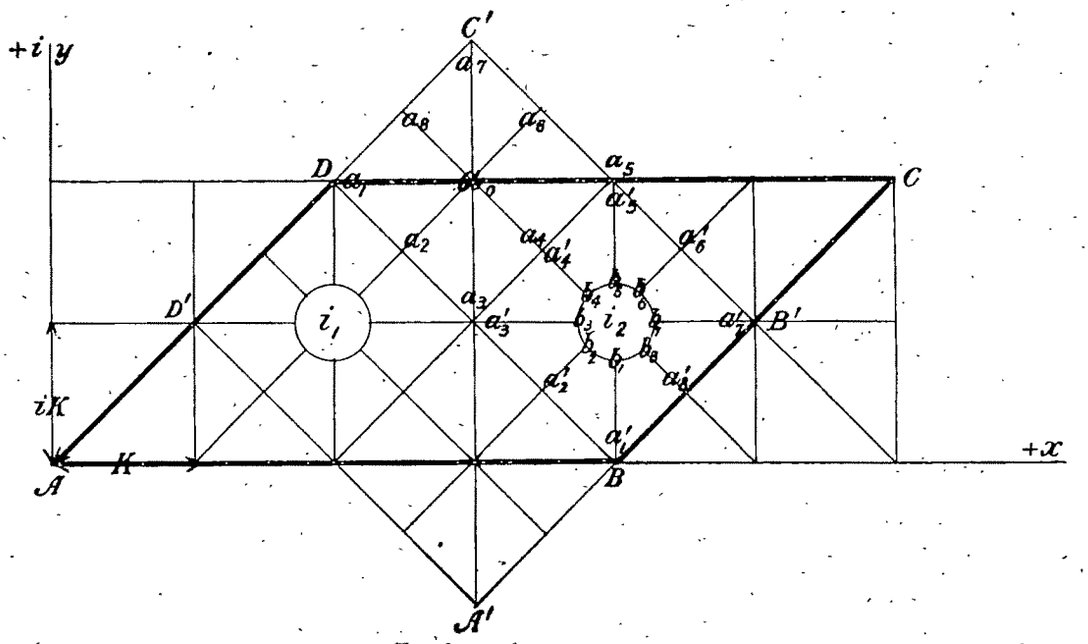


FIG. 2.—z-plane.

and without returning on itself $(\alpha_0\,\alpha_7)$, we set $z = K + iy$, $0 \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} K$. Then

$$\zeta = \operatorname{cn}(K + iy) = -\varkappa \frac{\operatorname{sn} iy}{\operatorname{dn} iy} = -\iota\varkappa \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{dn} y}, \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

For $y = 0$, $\zeta = 0$; for $y = K$, $\zeta = -i$. As ζ is a continuous function of y, ζ moves continuously along $(\alpha_0\,\alpha_7)$; further, it cannot return on itself, for then a point ζ on $(\alpha_0\,\alpha_7)$ would be twice represented on $(a_0\,a_7)$.

To establish the correspondence between α and a, a', let us show for example that $(a_1\,a_7)$ corresponds to $(\alpha_1\,\alpha_7)$. Here $z = x(1 + i)$ and thus

$$\zeta = \operatorname{cn}(x + ix) = \frac{\operatorname{cn}^2 x - i \operatorname{sn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}{1 - \operatorname{sn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}, \quad \therefore \ |\zeta| = 1,$$

so that ζ describes continuously and without turning the quadrant $(\alpha_1\,\alpha_7)$ while z moves on $(a_1\,a_7)$.

In a similar manner we can establish the correspondence between the medial lines $(a_2\,a_6)$, $(a_4\,a_8)$ of the square Σ_1 and the diameters $(\alpha_2\,\alpha_6)$, $(\alpha_4\,\alpha_8)$ of the circle α. This can also be readily shown by employing (8). Their quotient, namely, gives

$$\tan\theta = -\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y}.$$

As here $x = y + K$, $\tan\theta = 1$, so that $(a_2\,a_6)$ corresponds to $(\alpha_2\,\alpha_6)$. The correspondence of the circles b, β is thus shown. For points in the vicinity of i_2, $z = \iota K + z'$ and

$$\begin{aligned}\zeta = \operatorname{cn}(\iota K + z') &= -\frac{\iota \operatorname{dn} z'}{\varkappa \operatorname{sn} z'} \\ &= \frac{1}{z'}(a + bz'^2 + \ldots.),\end{aligned}$$

which shows that while z describes a small circle in positive sense about i_2, ζ describes an infinitely large circle in negative sense. An inspection of the relative position of the triangles t, τ leads one to suspect that the diagonals and medial lines of Σ_1, Σ_2 are lines of symmetry; that is, if z_1, z_2 be two points in z-plane situated symmetrically in respect to such a line, then ζ_1, ζ_2 are symmetrical with respect to the corresponding line in the ζ-plane. That this is so can be illustrated on the medial $(a_2\,a_6)$. For if in (8) we replace x by $K + y$ and y by $x - K$, the expressions for ξ, η interchange. For example, the expression

for ξ becomes

$$\frac{\operatorname{cn}(K+y)\operatorname{cn}(x-K)}{1-\operatorname{dn}^2(K+y)\operatorname{sn}^2(x-K)}=\varkappa^2\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{sn}y\operatorname{dn}x\operatorname{dn}y}{\operatorname{dn}^2x\operatorname{dn}^2y-\varkappa^2\operatorname{cn}x}=\eta.$$

In the same way we show that the diagonal $(a_3 a_7)$ is an axis of symmetry. For if $z_1=K+a+ib$ and $z_2=K-a+ib$ be two such points, we have

$$\begin{aligned}\zeta_1=\operatorname{cn}(K+a+ib)&=-\varkappa\frac{\operatorname{sn}(a+ib)}{\operatorname{dn}(a+ib)}\\&=-\varkappa\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}b+i\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b-\iota\varkappa^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a}=\frac{A+iB}{C-\iota D}\\&=\frac{AC-BD+i(BC+AD)}{C^2+D^2}=\xi+i\eta.\end{aligned}$$

Replacing a by $-a$, A and D become $-A$, $-D$ and

$$\zeta_2=-\xi+i\eta.$$

We may form a good idea of the representation of the parallels and meridians in the z-plane by considering the expression for the magnification

$$m=\left|\frac{dz}{dp}\right|=\left|\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dp}\right|.$$

As $\dfrac{d\zeta}{dp}=\dfrac{1}{1+\sin l}$ and $\dfrac{dz}{d\zeta}=\dfrac{1}{\rho_1\rho_2}$,

$$m=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^2 l+\frac{1}{4}\cos^2 l\sin^2 2\theta}}.$$

This shows that the magnification m is greatest at the equator and least at the poles; also that along a parallel m has a minimum for $\theta=45°, 135°\ldots.$ and a maximum for $\theta=0°, 90°\ldots.$ We have already seen that the representation is conform in the vicinity of the S-pole. The same being true for the N-pole, the parallels are approximately represented in the z-plane for some distance from the poles by circles. As however they approach the equator, the above considerations show that they take on square-like forms with rounded corners. As the representation is in general conform, the z-plane meridians everywhere cut the just described parallels at right angles, so that as they depart from the lines $(a_2 a_6)$, etc., they bend inward toward the same.

The correspondence of the planes ζ and z being now pretty accurately established, we may employ the formulæ (6), (7) with advantage. The foregoing considerations show that we need to compute α, β only for values of θ lying

between 0° and 45°. We may, if we like, use only one of the angles α, β, in which case we must take θ between 0° and 90°. As an illustration of their use I append the following table for $l = 5°$:

θ	α	β	x	y	$\frac{x}{K}$	$\frac{y}{K}$	$1-\frac{x}{K}$
0	45°29′	0	.4181	0	.2255	0	.7745
5	49 32	21°28	.4593	.1895	.2477	.1022	.7523
15	63 10	47 5	.6065	.4341	.3271	.2124	.6729
45	85 0	85 0	.9887	.8654	.5333	.4668	.4667

It will be noticed that although the formula given by Prof. Peirce for computing the coordinates of z is incorrect, the last two columns of the above table agree with the results given by him.

The representation afforded by $\zeta = \mathrm{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is everywhere conform except for certain points for which $\frac{d\zeta}{dz}$ becomes 0 or ∞, that for the corners of Σ_1, Σ_2 and i_2. We have already seen that the representation is conform at i_2, a fact illustrated by the diagonals and medial lines of Σ_2.

For the other points, however, the representation is not conform. To take an example a_1. For its vicinity, $\zeta = \mathrm{cn}\, z = (1 + az^3 + bz^4 + \ldots.)$, and thus

$$\zeta - 1 = z^3 (a + bz^3 + \ldots.),$$

which shows that two lines in the z-plane meeting under the angle ϕ meet under the angle 2ϕ in the ζ-plane. Thus $(a_1 a_2)$, $(a_1 a_3)$ make an angle of 90° in the z-plane, while in the ζ-plane they meet under an angle of 180°. Similarly $(a_1 a_0)$, $(a_1 a_2)$ meet under the angle 45° in z-plane, and under the angle 90° in the ζ-plane. At all the corners of Σ_1, Σ_2 the distortion of angles is double.

The function $\zeta = \mathrm{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ possesses then the very remarkable property

of representing in 1—1 correspondence the interior of the square Σ_1 by the interior of a circle of unit radius about the origin of the ζ-plane. Only at the corners does this representation cease to be conformal.

That such a function existed was discovered by Schwarz* while searching to determine a function, under certain simple conditions, to illustrate Riemann's theorem† that it is possible in one way only to represent conformally a simply connected surface T on a circle so that to the center corresponds any point in the interior, and to a point on the circumference any point on the edge of T. For the case of a square whose corners were $\pm K$, $\pm \iota K$, Schwarz arrived at the function $\zeta = \operatorname{sn}(u, i)$, which may also be written $\zeta = \operatorname{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, where $z = K - \sqrt{2}\,u$. This relation enables us to deduce all properties of $\operatorname{cn}\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ immediately from those of $\operatorname{sn}(u, i)$, or conversely.

---

*Schwarz, Crelle, vol. 70 (1869), p. 105–120; also Gesam. Math. Abh., vol. II, p. 65: Ueber einige Abbildungsaufgaben.

† Riemann, Gesam. Werke, p. 40. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen.

On the Invariance of the Factors of Composition of a Substitution-group.

By James Pierpont, *New Haven, Conn.*

The theorem* which asserts the invariance of the factors of composition of a group is of great importance in the theory of algebraic equations. It may be stated thus:

$$\left.\begin{array}{l}\text{In whatever manner we may decompose a group into a series of composition} \\ \qquad G,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ \ldots\ldots,\ G_\mu = 1, \\ \text{the factors of composition} \\ \qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\mu \\ \text{are in every case the same, aside from their order.}\end{array}\right\}\text{(A)}$$

Jordan's lengthy demonstration of this theorem has been greatly simplified by Netto† in his "Treatise on the Theory of Substitutions"; but by employing the notion of isomorphism the proof may be made still more simple.‡

The conception of isomorphism may be arrived at as follows: Let the equation $F(x) = 0$ have for a certain region of rationality the group G. Let ϕ_1 be any rational function of the roots of $F(x) = 0$ belonging to a subgroup G_1 of G, which for G takes on the values

$$\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \ldots\ldots,\ \phi_m.$$

Any substitution of G operating on this series will, in general, cause the ϕ's to permute among themselves, and thus give rise to a group of substitutions Γ

---

*C. Jordan, Traité des Substitutions et des Équations Algébriques. Paris, 1870, p. 41–48.

†E. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig, 1882, p. 87–90.

‡Cf. J. König, Ueber rationale Functionen, etc. Mathematische Annalen, vol. XIV, p. 212–30.

O. Hölder, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Math. Ann., vol. XXXIV, p. 26–56.

which, having the same properties as those of G, are said to be isomorphic to G. To a substitution of G will correspond a substitution of Γ, while to every substitution of Γ will correspond one and the same number of substitutions of G, namely, the number of substitutions of G corresponding to the identical substitution 1 of Γ.

The proof of (A) depends upon the following lemma:

Let the group G of order r have two maximal invariant subgroups H (order h, index α) and K (order k, index β). The group of substitutions C (order c) common to H and K is a maximal invariant subgroup for H and K. The index σ of C under H is equal to β, while its index τ under K is equal to α. (B)

We proceed then to prove (B).

In the first place we notice that C is invariant for H and K. For $S = H^{-1}CH$ is a substitution of H or K according as we regard C as in H or K. Thus S is common to H and K, and hence is in C, so that $H^{-1}CH = C$.

Let now ϕ be a rational function of the roots of $F(x) = 0$ belonging to C, and let $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2 \ldots .)$ be the group of substitution in the ϕ's corresponding to G; while $\Delta = (\delta_1, \delta_2 \ldots .)$ and $\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots .)$ may correspond to H and K resp. Then Δ and Θ are maximal invariant subgroups of Γ of orders σ and τ resp. The order of Γ is $\rho = \frac{r}{c}$.

The groups Δ and Θ have only the identical substitution in common; for if σ be common to them, then the corresponding substitutions $s_1, s_2 \ldots .$ of G are common to H and K and are hence in C. But to the substitutions of C correspond the identical in Γ.

The substitutions δ, ϑ are commutative. For the substitution $\delta^{-1}\vartheta^{-1}\delta\vartheta$ is equal to the identical substitution, since it is common to Δ and Θ, whence

$$\delta\vartheta = \vartheta\delta. \tag{a}$$

The substitutions of Γ are all of the form

$$\gamma = \delta\vartheta. \tag{b}$$

For these substitutions form a subgroup of Γ which is invariant for Γ, since Δ and Θ are. As this group contains the maximal subgroups Δ and Θ, it is identical with Γ. Further, from $\delta\vartheta = \delta_1\vartheta_1$ follows $\delta_1^{-1}\delta = \vartheta_1\vartheta^{-1}$, which, being a substitution common to Δ and Θ, is the identical substitution; whence $\delta = \delta_1$ and $\vartheta = \vartheta_1$. Thus $\rho = \sigma\tau$.

Let $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots .)$ be an invariant subgroup of Δ; then by (a) it is also invariant for Θ. The substitution $\pi_a = \lambda_{a_1} \vartheta_{a_2}$ form a subgroup $\Pi = (\pi_1, \pi_2 \ldots .)$ of Γ by virtue of (a), which is invariant for Γ, since Λ and Δ are. To Π will correspond the invariant subgroup P of G. As Π contains Θ, P will contain K, which being a maximal invariant subgroup of G requires that $\Lambda = 1$, so that C is a maximal invariant subgroup for Δ or Θ.

Finally since $r = c\sigma\tau = ca\sigma = c\beta\tau$; $a = \tau$, $\beta = \sigma$.

The demonstration of (A) now follows easily as by Netto.

Let $$G,\ G_1,\ G_2,\ G_3 \ldots . \tag{1}$$

and $$G,\ H_1,\ H_2,\ H_3 \ldots . \tag{2}$$

be two series of composition for G, having the factors of composition

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots . \tag{α}$$

and $$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \ldots . \tag{β}$$

Then if Γ be the substitution of G common to G_1 and H_1, the series

$$G,\ G_1, \Gamma \ldots . \tag{3}$$
$$G,\ H_1, \Gamma \ldots . \tag{4}$$

having by virtue of (B) the same factors, the demonstration of the identity of (α), (β) is reduced to proving that the factors of (1) are the same as those of (3); also that the factors of (2) and (4) are alike. But while (1), (2) have only the group G in common, (1) and (3) have e. g. two groups, G and G_1 in common. Applying the same reasoning to (1), (3), we obtain two new series having three groups in common, and so on. Finally, we need to show that if one mode of decomposition of a certain group L be

$$L,\ M,\ 1$$

while another is $$L,\ R \ldots ,$$

then these two series have the same factors. But this is evident from (B).

The Representation of Finite Groups, especially of the Rotation Groups of the Regular Bodies of Three- and Four-dimensional Space, by Cayley's Color Diagrams.

By H. Maschke.

The graphical representation of a group given by Cayley* leads to a diagram consisting of several lines of different colors, a so-called *color-group*, which affords a very clear insight into the structure of the group. Cayley himself applied his method only to groups of comparatively low orders, and it seems that the method has never been used for more complicated cases.†

The purpose of the present paper is to show how readily Cayley's method can be applied to the construction and investigation of numerous groups of higher orders. In particular, the color diagrams for the rotation groups of the regular bodies can be arranged in such a way that they lend themselves much easier, at least in some respects, to a study of the groups concerned, than even the models of the regular bodies.

The most prominent feature of these diagrams, to which their high degree of perspicuity is due, consists in the fact that their color lines do not intersect each other, so that the diagrams, when described on the sphere, constitute convex polyhedrons. I determine, in the first part of the paper, all the color-groups thus defined and show that, apart from two other cases, they are identical with the rotation groups of the regular bodies. In the second part I study in detail the connection between the rotation groups and the corresponding diagrams. The third part of the paper contains some extensions of the

---

*Cayley, "The Theory of Groups: graphical representation," American Journal, vol. I, p. 174; "On the Theory of Groups," American Journal, vol. XI, p. 189.

†Cf. Young, "On the Determination of Groups whose Order is a Power of a Prime," American Journal, vol. XV, p. 43, where the color diagrams for the groups of order 16 are given.

principles developed, leading to the so-called extended rotation groups and other groups of a similar character. In the last part I determine the color diagrams for the rotation groups of the regular four-dimensional bodies, which I define analytically by orthogonal substitutions, showing also the peculiar connection between these groups and the theory of the Icosahedron.

It seems desirable to give at the outset a short explanation of Cayley's method, modified in as much as it bears on the present subject.

PART I.

§1.—*Cayley's Method.*

Let a finite group G of order N be generated by all the possible combinations and repetitions of a certain number of "generating" operations $S, T, \ldots . U$. These generators are supposed to be independent of each other, i. e. it must not be possible to express any of them in terms of the others. Now let O_1 be any object capable of being acted upon by the operations of G, and such that none of the operations of G, except unity, leaves O_1 unchanged. Represent this object by a point a_1. When S is applied, O_1 may be transformed into O_2, and O_2 represented by another point a_2. Applying then in succession all the different operations of G, we obtain, corresponding to $O_1, O_2, \ldots , O_N$, a system of N distinct points $a_1, a_2, \ldots , a_N$, which we will call the *fundamental points.* The operation S changes every point a_k into another point. Otherwise, denoting by V the operation transforming a_1 into a_k, $VS.V^{-1}$ would leave the point a_1, i. e. the object O_1 unchanged. But since O_1, according to our hypothesis, remains unchanged only by the operation unity, we would have $VSV^{-1} = 1$, or $S = 1$. We may, therefore, indicate the operation S by directed lines (lines with an arrow) leading from every point to that into which it is transformed by S. But S has a finite period, say p, so that $S^p (= 1)$ leaves every point unaltered. The system of lines representing the operation S consists accordingly of N/p polygons of p sides. Similarly, if q is the period of T, we obtain a system of lines representing the operation T consisting of N/q polygons of q sides, etc. To distinguish the S-lines from the T-lines, etc., we choose different colors for the lines belonging to different generating operations. Such a system of directed lines of different colors, representing a group, has been

called by Cayley a *color-group.** It has the following important properties which will be referred to as theorems 1 and 2:

Theorem 1. *To every point and from every point there leads one and only one line of each color.*

Every operation $S^\alpha T^\beta U^\gamma \ldots$ determines therefore uniquely a *route* to be described from any initial point a. The end point of this route indicates the effect of the operation on the point a.

Theorem 2. *Every route* (defined by $S^\alpha T^\beta U^\gamma \ldots = 1$) *leading from any point a back to the same point a, leads from every point* a_k *back to the same point* a_k.

The conditions given by these two theorems are not only necessary, but also sufficient for a diagram to constitute a color-group.

If the period of one of the generating operations, say T, be 2, then the $N/2$ polygons representing T are bilateral. Every one of these "digons" may be indicated by *one* (double) line of a certain color, having two directions, and we shall agree in this case to simply omit the arrows. The above two theorems hold, of course, also in this case.

§2.—*Regular Color-groups.*

I now propose to find all those *two-colored* color-groups in the plane, *the lines of which do not intersect each other*, except, of course, in the fundamental points. Such a color-group I shall hereafter call a *regular* color-group. The plane may be transformed into a sphere (we are in this whole investigation only concerned with geometry of *analysis situs*) and then we obtain a convex polyhedron on the sphere. Conversely, to any two-colored color-group on the sphere, forming a convex polyhedron, there corresponds a regular color-group in the plane.

The two generating operations with which we are now only concerned may be denoted by S-black lines and R-red lines. In the adjoined figures a black line, or an S-line, as we sometimes shall call it, will always be represented by a continuous line, ————, a red or R-line by a broken line, - - - - - - - -.

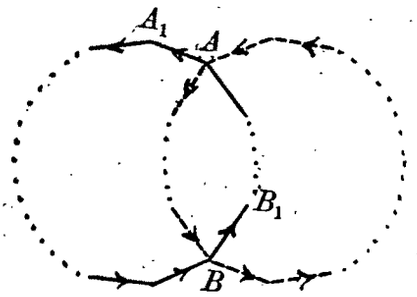
With regard to these regular color-groups, I am going to prove two fundamental theorems which may be referred to as theorems 3 and 4.

---

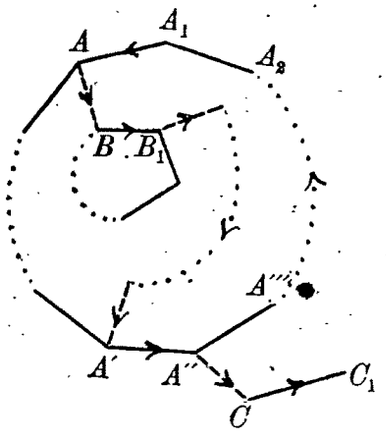
*This word will be used in the sense of the geometric diagram as well as in the sense of the abstract group represented by the diagram.

Theorem 3. *The four-colored lines concurring in one point are such that the two lines of one color are not separated by a line of the other color.*

If it were otherwise, then we would have a black and red polygon meeting in two points A and B, as shown in the adjoined figure.



A black and a red route would then lead in the direction of the arrows from A to B, involving an equation $S^\alpha = R^\beta$, or $S^\alpha R^{-\beta} = 1$. Apply now the route $S^\alpha R^{-\beta}$ to A_1. The route S^α leads to B_1. But B_1 cannot be identical with the point A, otherwise we would have a relation $S = R^\kappa$. Now $R^{-\beta}$ must, on account of $S^\alpha R^{-\beta} = 1$, lead from B_1 back to A_1, which, on the other hand, is impossible, since one of the points A_1 and B_1 lies outside, the other inside the red polygon, and $R^{-\beta}$ is a red route which cannot cross the circumference of the red polygon. If it would, then four red lines would concur in one fundamental point, in contradiction to theorem 1.



Theorem 4. *Any S- or R-polygon contains in its interior either all the points of the color-group or no points at all.*

Let $AA_1 \ldots . A''A' \ldots .$ be a black polygon P, and suppose some points of

the color-group lie within P. At least one red line must lead from some corner of P into the interior of P, otherwise the points within P would not be connected at all with the corners of P, whereas it must be possible to pass from every point of the color-group to every other. Let this red line be the line AB. The point B must belong to some S-polygon which lies entirely inside P.

Let us now consider the operation RS. This operation has a finite period, say λ, so that $(RS)^\lambda = 1$. If we apply the route $(RS)^\lambda$ to the point A, then this route must lead back to A, but it may happen to lie partly outside P. In this case the route leading from A to B, then to B_1, etc., must meet some point, say A' of P, then lead to A'', C, C_1, and finally from C_1 back to A_1 and A. That part of this route which leads from A to A'' is given by $(RS)^{\lambda-\mu}$, and now we may go back from A'' to A directly on the black polygon P, i. e. by the route S^ν. Thus we have $(RS)^{\lambda-\mu}S^\nu = 1$. If now we apply $(RS)^{\lambda-\mu}S^\nu$ to B_1, then $(RS)^{\lambda-\mu}$ leads from B_1 to C_1, and the black route S^ν ought to lead back from C_1 to B_1, which, however, is impossible, C_1 lying outside, B_1 inside the black polygon P.

The consequence is that the route $(RS)^\lambda$ applied to A lies entirely inside P. It leads accordingly back by a red line to A_1 and then to A. Thus the existence of a red line leading from A into the interior of P involves the existence of a red line leading from the interior of P to A_1. But according to theorem 3 the other red line concurring in A_1 must also lie inside P. We have then also in A_1 a red line leading into the interior of P. That implies again the existence of two red lines emanating from A_2 into the interior of P and so on, all around the polygon P. The result is that all the red lines concurring in all the corners of P lie inside P. There is no connection left for any outside points, and therefore the polygon P contains all the fundamental points of the color-group in its interior. Thus theorem 4 is proved.

If we lay out the color diagram on the sphere, then we obtain a convex polyhedron containing a certain number of S- and R-polygons *which all exclude each other* on account of theorems 3 and 4. For that polygon which includes all the other points of the color-group in the plane appears now on the sphere as a polygon, including, on its other side, no point.

Besides the S- and R-polygons, there are other polygons on the color polyhedron. The sides of every one of those are alternately black and red (and therefore of even number) in consequence of theorems 3 and 4, as an easy consideration shows. These polygons we shall call *intermediate.*

For further investigation we apply Euler's theorem. Two cases are to be distinguished—

1). S and R are both of a period higher than 2.

2). S or R or both are of period 2.

§3.—*The Periods of R and S are higher than* 2.

In this case we have in every vertex of the color polyhedron four concurring edges. The number of vertices is N, the order of the group. The number of edges is $4N/2 = 2N$. The number of faces, f, is, according to Euler's theorem, $f = 2N - N + 2 = N + 2$.

Denote the number of trilateral, quadrilateral, etc., faces by $f_3, f_4, \ldots$, then we have

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = N + 2, \tag{1}$$
$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 4N. \tag{2}$$

Multiplying the first equation by 4 and subtracting the second, we obtain

$$f_3 = 8 + (f_5 + 2f_6 + \ldots).$$

Consequently some of our polygons must be triangles. But all the intermediate polygons have an even number of sides. T erefore either the S-polygons or the R-polygons or both must be triangles, i. e.

The period of at least one of the two generating operations S and R is 3.

If, now, the S- and R-polygons be triangles, then

$$f_3 = 2N/3,\ f_5 = f_7 = f_9 = \ldots = 0,$$

so that

$$3f_4 + 3f_6 + 3f_8 + \ldots = N + 6,$$
$$2f_4 + 3f_6 + 4f_8 + \ldots = N,$$

whence we deduce

$$f_4 = 6 + (f_8 + 2f_{10} + \ldots),$$

i. e. *some of the intermediate polygons are quadrangles.*

If, on the other hand, only the S-polygons be triangles, then we have $f_3 = N/3$ and

$$f_4 + f_5 + f_6 + \ldots = 2N/3 + 2,$$
$$4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \ldots = 3N.$$

Multiplying the first of these equations by 5 and subtracting the second, we obtain

$$f_4 = N/3 + 10 + (f_6 + 2f_7 + \ldots),\ \text{i. e. } f_4 > N/3.$$

Now the R-polygons might be quadrangles, but if so, then their number is only $N/4$. Consequently also in this case, *some of the intermediate polygons must be quadrangles.*

This result means—

1) there exists a relation $R^{\varepsilon_1}S^{\varepsilon_2}R^{\varepsilon_3}S^{\varepsilon_4}=1$, where the quantities ε stand for $+1$ or -1;

2) there exist some quadrilaterals, defined by the closed route $R^{\varepsilon_1}S^{\varepsilon_2}R^{\varepsilon_3}S^{\varepsilon_4}$, which are quadrangles, i. e. which do not include any other points of the color-group.*

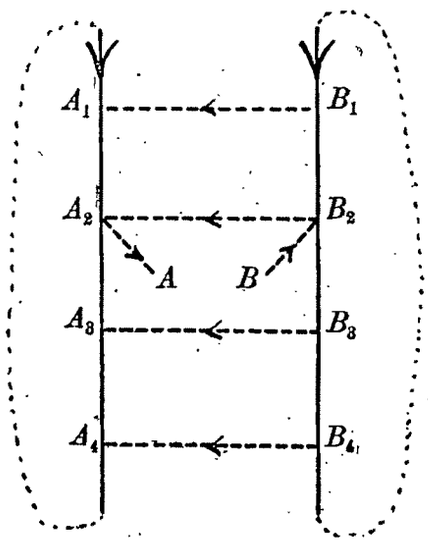
It will be shown that all the intermediate polygons are quadrangles.

We may assume $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$, for if U denotes one of the generating operations of a group, it may be replaced by U^{-1}, so that in the case ε_1 or $\varepsilon_2=-1$ we have only to change the signification of R and S into R^{-1} and S^{-1}.

Examining first the case

$$RSR^{-1}S^{-1}=1, \tag{3}$$

let $B_1A_1A_2B_2$ be a quadrangle corresponding to relation (3). B_1B_2 and A_1A_2 belong each to a black polygon $B_1B_2B_3\ldots$ and $A_1A_2A_3\ldots$ resp., as shown in the figure, where the direction in which these polygons are to be described is indicated by only one arrow. Applying now the route (3) to the points B_2, B_3, $B_4\ldots$ in succession, we see that all these points are connected with the corresponding points A_2, A_3, $A_4\ldots$ by equally directed red lines. Besides



* I distinguish between a quadrilateral, i. e. any closed route consisting of four lines, and a quadrangle, i. e. a quadrilateral face of the polyhedron.

$A_2 B_2$, another red line $A_3 A$ will concur in A_2, and this line cannot lead into the interior of the black polygon $A_1 A_2 A_3 \ldots$ according to theorem 3, nor into the interior of $A_1 A_2 B_2 B_1$, which is, according to our hypothesis, a quadrangle. It leads, therefore, into the interior of the quadrilateral $A_2 A_3 B_3 B_2$. The same argument holds with regard to the red line $B_2 B$. From (3) we derive at once $R^{-1}S^{-1}RS = 1$, a route which is represented, for instance, by $A_2 B_2 B_1 A_1 A_2$. But if we try to apply this route to A, then $R^{-1}S^{-1}$ leads to A_1, and now there remains no possibility to return from A_1 by RS to A. Relation (3) is therefore to be rejected.

By a similar argumentation it follows that also the relation

$$RSR^{-1}S = 1 \tag{4}$$

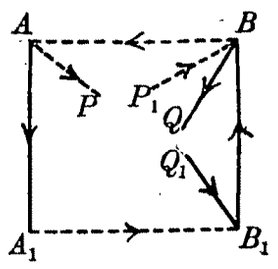
is to be rejected. To show this, we have in the figure only to reverse the arrow of the polygon $B_1 B_2 B_3 \ldots$ and to apply the route (4) to the point B. RS leads to B_1, and we cannot return from B_1 by $R^{-1}S$ to B.

Interchanging in (4) R and S, we see that also the case $SRS^{-1}R = 1$, or $RSRS^{-1} = 1$, is to be rejected.

There remains then only

$$RSRS = 1\,. \tag{5}$$

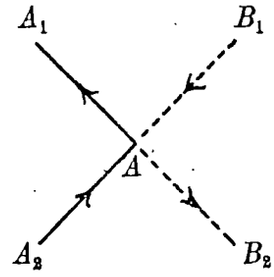
Now if any quadrilateral BAA_1B_1 (see the following figure) defined by (5) contain any inside point, then at least one red or black line must lead from some corner to the interior, for instance, the red line AP. It follows that also P_1, defined by $P_1 B \equiv R$, must be an inside point, because it belongs with PAB to the same red polygon. Applying now (5) to P_1, we see that RS cannot lead to any outside point, for then, in order to return from this outside point by the route RS to P_1, the route R could only lead to A_1, and S from A_1 directly to P_1;



but this would give rise to the closed route $P_1 B B_1 A_1$, i. e. to $RS^{-1}R^{-1}S = 1$, which is impossible. Accordingly a black line BQ must lead to the interior,

and likewise $Q_1 B_1$ from the interior to B_1. Finally we see, applying the same argument to Q_1, etc., that all the black and red lines emanating from the four points $A B B_1 A_1$ lead to the inside.

If, therefore, any quadrilateral defined by (5) contain any inside points, then no point of the color-group will be outside this quadrilateral, and this means, considering the color-group as a polyhedron on the sphere, no quadrilateral $RSRS$ contains any points in its interior, or every such quadrilateral is an intermediate quadrangle.



Now if we consider any vertex A with the four concurring edges AA_1, AA_2, AB_1, AB_2, then $B_1 A A_1$ are three points of an intermediate quadrangle, and such are also $A_2 A B_2$, corresponding to the route (5). The same holds for every fundamental point of the color-group, and thus we see that *all the intermediate polygons are quadrangles.*

According to the preceding results either the S- or the R-polygons, say the S-polygons, are triangles. Their number f_3 is given by the equation $3f_3 = N$. The number of the intermediate quadrangles f_4 is given by the equation $2f_4 = N$, because every vertex belongs to two quadrangles. Let the R-polygons have x sides, and let f_x be their number. Then we have $xf_x = N$. Equation (1) becomes now

$$f_3 + f_4 + f_x = N + 2,$$

i. e.

$$\frac{N}{3} + \frac{N}{2} + \frac{N}{x} = N + 2,$$

or

$$N(6 - x) = 12x.$$

But $x \geqq 3$, according to our hypothesis, and since $6 - x$ in the last equation must be positive, x can assume only the values 3, 4, 5. Thus we obtain the following cases:

1) $x = 3$, $N = 12$,
2) $x = 4$, $N = 24$,
3) $x = 5$, $N = 60$.

The corresponding color-groups are now defined completely; they are given in Figs. 4, 7 and 10, and will be denoted resp. by V, VII and X. We observe, viewing the color polyhedron from points outside the sphere, that in all the S-polygons the arrows run the same way and also in all the R-polygons. This fact is due to the relation $RSRS=1$ or $RS^{-1}RS^{-1}=1$. We postpone a further explanation of these color-groups to §5, where they will be treated together with the results of §4.

§4.—*The Period of R or S is equal to* 2.

If the generators R and S are both of period 2, then we have $N=2n$ (n any integer). The corresponding color-group is given by a closed polygon of $2n$ sides, consisting alternately of black and red lines—see Fig. 1; this color-group will be denoted by I. Either line is a not directed double line which may be described either way.

We now assume only one generator, say R of period 2, the other S of period n ($n>2$). Suppose, at first, any two S-polygons, $A_1A_2A_3\ldots.$ and $B_1B_2B_3\ldots.$ be connected by two red lines, A_1B_1 and A_iB_k. Then some relation $S^\alpha RS^\beta R=1$ holds, representing the closed route $A_1A_iB_kB_1A_1$. If we apply the same route to A_2, we see that A_2 must be connected by a red line with some point B of the other polygon, and further, that *each* point A of the first polygon must be connected with some point of the second polygon. But the same reasoning applies to the second polygon. Thus we see *if two S-polygons hang together by more than one red line, then all the points of the two polygons are connected by red lines.*

But then all the points of the two polygons are, so to speak, "saturated"; they form a color-group consisting of $N=2n$ points, where the intermediate polygons are quadrangles, satisfying either the relation $SRSR=1$ or $SRS^{-1}R=1$. The color-group for the first case ($SRSR=1$) is given in Fig. 2 for $n=3$, and will be denoted by II. The diagram for the case $SRS^{-1}R=1$ differs from Fig. 2 only by the reversed direction of the sides of the inside or outside S-polygon. We will denote this color-group by IIa.

In the following we suppose, then, that any two S-polygons are connected at the utmost by *one* red line, and accordingly, that the lowest number of sides of the intermediate polygons be 6.

The number of edges is $3N/2$, since there are in every vertex 3 concurring edges. Euler's theorem gives the number of faces $f = N/2 + 2$. Thus we obtain these two equations

$$f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \ldots = N/2 + 2, \tag{6}$$
$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \ldots = 3N. \tag{7}$$

Multiplying equation (6) by 6 and subtracting (7), we have

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + (f_7 + 2f_8 + \ldots),$$

and this equation shows the existence of some S-polygons of either 5 or 4 or 3 sides, since the number of sides of the intermediate polygons is even, and the existence of quadrangles as intermediate polygons has already been excluded.

The period of S is then either 5 or 4 or 3.

1) $S^5 = 1$.

We have in this case $f_5 = N/5$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, and equations (6) and (7) become

$$f_6 + f_8 + f_{10} + \ldots = 3N/10 + 2,$$
$$6f_6 + 8f_8 + 10f_{10} + \ldots = 2N,$$

whence, multiplying the first by 8 and subtracting the second,

$$2f_6 = 2N/5 + 2 + (2f_{10} + 4f_{12} + \ldots).$$

There must, consequently, exist *some intermediate polygons of* 6 *sides.*

2) $S^4 = 1$.

We have here $f_4 = N/4$, $f_3 = 0$, $f_5 = 0$,

$$f_6 + f_8 + f_{10} + \ldots = N/4 + 2,$$
$$3f_6 + 4f_8 + 5f_{10} + \ldots = N,$$
$$\therefore f_6 = 8 + (f_{10} + \ldots).$$

Also in this case there must exist *some intermediate hexagons.*

3) $S^3 = 1$.

We have $f_3 = N/3$, $f_4 = 0$, $f_5 = 0$,

$$f_6 + f_8 + f_{10} + \ldots = N/6 + 2,$$
$$3f_6 + 4f_8 + 5f_{10} + \ldots = N,$$
$$\therefore 3f_6 + 2f_8 + f_{10} = 12 + (f_{12} + \ldots).$$

Here we can only infer that *there must exist intermediate polygons of*

a) 6, *or* b) 8, *or* c) 10 *sides.*

In the cases 1), 2) and 3a) there exist some intermediate hexagons. This involves one of the two relations

$$SRSRS^{-1}R = 1, \tag{8}$$
$$SRSRSR = 1, \tag{9}$$

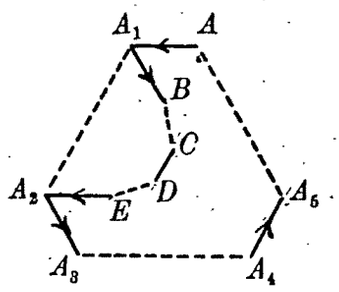
the relation $SRS^{-1}RS^{-1}R = 1$ being essentially the same as (8) and $S^{-1}RS^{-1}RS^{-1}R = 1$ the same as (9). From (8) we deduce

$$RSRS^{-1}RS = 1,$$

and combining this relation with (8), we obtain

$$SRSRS^{-1}R.RSRS^{-1}RS = 1,$$

which reduces to $S^2 = 1$. But the period of S is, according to our hypothesis, > 2, and therefore case (8) is to be rejected. There remains relation (9).



Let now $AA_1A_2 \ldots . A_5A$, as shown in the adjoined figure, be a route given by $(SR)^3 = 1$. If there were any points inside this polygon P, then some black line, say A_1B, would lead into the interior of P. Apply now $(SR)^3$ to point A_1. S leads to B, R from B to a point C, again inside P, S from C to a point D, which cannot be any one of the corner points of P, for then there would arise two triangles connected by two red lines. R leads from D again to an inside point E and finally S to A_2, because R must lead back to A_1. Consequently the S-polygon belonging to A_2A_3 lies inside the polygon P, and, by a similar reasoning, also that which belongs to A_4A_5.

There is then no connection whatever with any outside point, and considering again the color-group on the sphere, we see that all the polygons $(SR)^3 = 1$ must be intermediate polygons. It follows that conversely every intermediate

polygon is given by the relation $(SR)^3 = 1$. The conclusion is entirely analogous to that connected with the figure on page 163.

Now we have in case 1, page 166, f_5 pentagons and f_6 hexagons. The number of vertices being N, we obtain $5f_5 = N$ and $6f_6/2 = N$, because each vertex lies on 2 adjoining hexagons. Euler's theorem gives

$$f_5 + f_6 = N/2 + 2,$$

or

$$\frac{N}{4} + \frac{N}{3} = \frac{N}{2} + 2,$$

$$\therefore N = 60,\ f_5 = 12,\ f_6 = 20.$$

This defines completely the color-group VIII given in Fig. 8.

Case 2, page 166, gives $4f_4 = N$, $6f_6/2 = N$,

$$f_4 + f_6 = N/2 + 2,$$

$$\frac{N}{4} + \frac{N}{3} = \frac{N}{2} + 2,$$

$$\therefore N = 24,\ f_4 = 6,\ f_6 = 8.$$

The corresponding color-group V is given in Fig. 5.

In case 3a, page 166, we have $3f_3 = N$, $6f_6/2 = N$,

$$f_3 + f_6 = N/2 + 2,$$

$$\frac{N}{3} + \frac{N}{3} = \frac{N}{2} + 2,$$

$$\therefore N = 12,\ f_3 = 4,\ f_6 = 4,$$

Fig. 3 represents this color-group III.

There remain the two cases 3b and 3c, page 166. In case 3b there exist some intermediate octagons. This involves one of the following relations:

$$SRSRSRSR = 1, \tag{10}$$

$$SRS^{-1}RSRS^{-1}R = 1, \tag{11}$$

$$SRSRS^{-1}RS^{-1}R = 1, \tag{12}$$

$$SRSRSRS^{-1}R = 1. \tag{13}$$

Relation (13) is to be rejected, for if we combine it with $RSRS^{-1}RSRS = 1$, which is an immediate consequence of it, we obtain

$$SRSRSRS^{-1}R.RSRS^{-1}RSRS = 1,$$

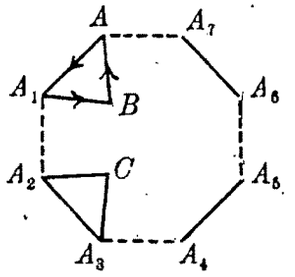
which reduces to

$$SRS^2RS = 1,$$

or, the period of S being 3,

$$RS^2RS^2 = 1.$$

But this relation would give rise to a connection of two black triangles by two red lines.



In the three remaining cases (10), (11), (12), we suppose that an octagon $AA_1A_2A_3 \ldots . A_7A$, defined by one of these equations, contains inside points. Then at least one of the four S-triangles, say AA_1B, must lie in the interior of the octagon P. Apply now

$$SRS^{\alpha_1}RS^{\alpha_2}RS^{\alpha_3}R = 1 \tag{14}$$

—where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \pm 1$ according to (10), (11) or (12)—to the point A_1. This route must lie entirely inside the octagon, because otherwise there would arise a hexagon or a quadrangle involving some relation $S^{\alpha_1}RS^{\alpha_2}RS^{\alpha_3}R = 1$ or $S^{\alpha_1}RS^{\alpha_2}R = 1$. The route (14) leads, then, from A_1 into the interior of the octagon, then to A_2 and back to A_1. In case (10) and (11) we see at once that the route must lead to A_2 from an inside point C (not from A_3). In case (12) we apply the route $SRS^{-1}RS^{-1}RSR = 1$ to A_1 and come to the same conclusion. The triangle belonging to A_2A_3 lies therefore in all these cases inside the octagon, and similarly also the triangles belonging to A_4A_5 and A_6A_7.

Consequently all the polygons defined by the equations (10), (11) or (12) are intermediate polygons, and all the intermediate polygons are given by one of these equations.

We have now $3f_3 = N$, $8f_8/2 = N$,

$$f_3 + f_8 = N/2 + 2,$$
$$\frac{N}{3} + \frac{N}{4} = \frac{N}{2} + 2,$$
$$\therefore N = 24,\ f_3 = 8,\ f_8 = 6.$$

The corresponding color-group VI is given in Fig. 6. The arrows in that

diagram are taken according to the relation (10). Taking the directions of the arrows of the eight triangles alternately opposite, we obtain the color-group belonging to (11), which may be denoted by VIa. Case (12), however, is to be rejected altogether, since it is impossible to arrange in each intermediate octagon the arrows according to (12).

In the remaining case 3c, page 166, we have the following possibilities:

$$SRSRSRSRSR = 1, \tag{15}$$
$$SRSRSRSRS^{-1}R = 1, \tag{16}$$
$$SRSRSRS^{-1}RS^{-1}R = 1, \tag{17}$$
$$SRSRS^{-1}RSRS^{-1}R = 1. \tag{18}$$

In case (16) we have $SRSRSR = RSRS^{-1}$ and $SRSRSRS^{-1}RSR = 1$. Combining these two relations, there follows

$$RSRS^{-1}.S^{-1}RSR = 1,$$
or
$$SRS^{-2}RS = 1,$$
or
$$RS^{-2}RS^{2} = 1,$$

which relation would lead to two triangles connected by two red lines. Case (16) is therefore to be rejected.

In case (17) there follows $RSRSRS^{-1}RS^{-1}RS = 1$, and multiplying this on the left by (17), the product reduces to $S^2 = 1$, which shows that also case (17) is to be rejected.

Case (18) leads to the same contradiction $S^2 = 1$, as can be seen by multiplying equation (18) on the right-hand by $RSRS^{-1}RSRS^{-1}RS = 1$.

There remains therefore only relation (15). That any decagon corresponding to this relation cannot contain any inside points can be shown in exactly the same way as the corresponding proposition has been proved in the case of the octagons defined by (10). All the intermediate polygons are then defined by (15), and we have $3f_8 = N$, $10f_{10}/2 = N$,

$$f_8 + f_{10} = N/2 + 2,$$
$$\frac{N}{3} + \frac{N}{5} = \frac{N}{2} + 2,$$
$$\therefore N = 60,\ f_8 = 20,\ f_{10} = 12.$$

The corresponding color-group IX is given in Fig. 9.

Reviewing the color-groups obtained in this section (§4), we observe that in every one of the color-groups II, III, V, VI, VIII and IX, represented by Figs. 2, 3, 5, 6, 8 and 9 resp., the S-polygons are equally directed, while in the groups IIa and VIa, the diagrams of which, except the arrows, are also given in Figs. 2 and 6 resp., the directions of the S-polygons are alternately opposite.

PART II.

§5.—*Connection with the Rotation Groups of the Regular Bodies.*

The result of the preceding developments can be stated as follows:

All those two-colored color-groups of a finite number of fundamental points whose diagrams constitute a convex polyhedron on the sphere are represented by the groups I, II, IIa,* III, IV, V, VI, VIa, VII, VIII, IX, X, given in Figs. 1–10 in plane projection. (Regarding the diagrams of IIa and VIa see the remark at the end of §4.)

There is an obvious connection between these diagrams laid out on the sphere and the figures of the regular bodies, viz.

The diagrams 3, 5, 6, 8 *and* 9 *represent a tetrahedron, octahedron, hexahedron, icosahedron and dodecahedron with truncated vertices; the diagrams* 4, 7 *and* 10 *a tetrahedron, octahedron and icosahedron whose edges are truncated and the vertices so far as to yield polygons of so many sides as there were edges concurring in the original vertices.*

The above given result could have been deduced without any difficulty, if it were admissible to suppose the so-called "intermediate" polygons in each color-group to be of equal number of sides. The demonstration of this important property of the intermediate polygons may be regarded as the principal object of the preceding investigation.

This close connection of our diagrams with the regular bodies suggests the existence of some connection between our color-groups and the rotation groups of the regular bodies. I am going to show that the color-groups I–X represent precisely these rotation groups. The color-groups IIa and VIa, being of a different character, will be treated separately in §6.

* The color-groups of the type I, II and IIa have also been given, in a slightly different form, by Cayley, American Journal, vol. XI, p. 154–155.

We mark on the faces of the regular bodies a *general point group.** This means we choose arbitrarily, say in the vicinity of one of the vertices, a point, and let the regular body undergo all the N rotations of the corresponding group. By this process the originally selected point assumes altogether N different positions determining N points, the points of a "general point group." *These N points we take as the fundamental points of the corresponding color-group.*

With regard to notation we denote the faces by letters, the vertices by numbers, and accordingly, for instance, the point situated on the face a in the vicinity of the vertex 1 by a_1, etc.

The Dihedron (cf. Figs. 1, 2 and 11).

In Fig. 11 the upper and lower half of the dihedron for the case $n = 3$ is shown separately.

The color-group I, Fig. 1, represents the dihedron group generated by two rotations of period 2. The black lines signify a rotation U *of period* 2 about the diameter bisecting the edge which is common to the two faces b, the red lines a rotation T *of period* 2 about the diameter bisecting the edge which is common to the two faces a.

We see from the color-group in Fig. 1 as well as from the model in Fig. 11 that T transforms the point a_1 into a_2, b_1 into c_2, c_1 into b_2, U the point a_1 into c_2, b_1 into b_2, c_1 into a_2, etc.

In the color-group II, Fig. 2, the black lines represent a rotation S *of period* 3 about the principal dihedron axis 1, 2; the red lines the same rotation T as in I.

Comparing the color-groups I and II, we deduce at once the relation $UT = S$; we see also from Fig. 1 immediately that UT is of period 3, from Fig. 2 that ST is of period 2, etc.

The Tetrahedron (cf. Figs. 3, 4 and 12).

The left part of Fig. 12 represents the upper pyramid of the tetrahedron; the right part, the triangle on which it stands.

In the *color-group* III, Fig. 3, the black lines signify a rotation S *of period* 3 about the diameter passing through the vertex 1 (in Fig. 12), the red lines a rotation T *of period* 2 about the diameter bisecting the edges 1, 4 and 2, 3.

* Cf. Klein, Icosaëder, page 47.

The *color-group* IV, Fig. 4, shows the generation of the tetrahedron group by two rotations of period 3. The black lines mean the same rotation S *of period* 3 as in III, the red lines a rotation U *of period* 3 about the vertex 3.

Comparing Figs. 3 and 4 we recognize immediately the relation $U = TS$, viz. U transforms in Fig. 4, TS in Fig. 3 the point a_1 into d_2, etc.

The Octahedron (cf. Figs. 5, 6, 7 and 13).

In Fig. 7 the point 3 represents the apex of the upper pyramid of the octahedron, point 4 the opposite vertex. The four triangles concurring in 4 are separated in the figure by sections along the four edges concurring in 4. Every two opposite faces are denoted by equal letters.

The black lines of *the color-group* V, Fig. 5, represent a rotation S *of period* 4 about the axis 3, 4, the red lines a rotation T *of period* 2 about the diameter bisecting the edges 3, 5 and 4, 6.

In *the color-group* VI, Fig. 6, the black lines signify a rotation U *of period* 3 about the diameter passing through the middle points of the two faces a, the red lines a rotation V *of period* 2 about the diameter bisecting the edges 4, 5 and 3, 6.

Finally, in the *color-group* VII, Fig. 7, the black lines represent the same rotation S *of period* 4 as in V, and the red lines the same rotation U *of period* 3 as in VI.

We readily deduce from these three color-groups the following relations: $U = S^3TS^2$, $V = S^2TS^2$, $S = UV$, $T = VUVU^2VU$, etc.

The Icosahedron (cf. Figs. 8, 9, 10 and 14).

Fig. 14 represents the icosahedron in two halves. Opposite faces are denoted by equal letters, opposite vertices by numbers whose sum is 12.

In *the color-group* VIII, Fig. 8, the black lines indicate a rotation S *of period* 5 about the diameter passing through the vertices 0 and 12, the red lines a rotation T *of period* 2 about the diameter bisecting the edges 0–4 and 12–8.

The black lines in *the color-group* IX, Fig. 9, represent a rotation U *of period* 3 about the diameter passing through the middle points of the two faces c, the red lines the same rotation T *of period* 2 as in VIII.

Finally, in *the color-group* X, Fig. 10, the black lines signify the rotation S *of period* 5 defined in VIII, the red lines the rotation U *of period* 3 defined in IX.

The relation $U = ST$ is immediately recognized from the diagrams.

The three color-groups of the icosahedron just discussed show that the icosahedron group can be generated by two rotations of periods 2 and 5, 2 and 3, 3 and 5 resp. But the icosahedron group can also be generated by two rotations of period 3. As such we may take for instance a rotation V *of period* 3 about the diameter passing through the middle points of the two faces a, and a rotation W *of period* 3 about the diameter passing through the middle points of the two faces b. And now it follows from the preceding developments that the corresponding color-group, consisting of V- and W-lines, can only be such that these V- and W-lines must of necessity intersect each other.

In the simpler case of the octahedron a similar remark takes place. Besides the rotations of V, VI and VII, also the following two rotations, both of period 4, can be taken in order to generate the octahedron group: a rotation V *of period* 4 about the axis 3, 4 (Fig. 13) and a rotation W *of period* 4 about the axis 1, 2. The corresponding color-group, in which V is represented by black lines, W by red lines, is given in Fig. 15. It is impossible to disentangle this diagram in such a way that there be no intersection of the color lines.

§6.—*The Groups* IIa *and* VIa.

The color-groups IIa consist of two black concentric polygons of n sides each, whose opposite vertices are connected by red lines. The black lines represent an operation S of period n, the red lines an operation R of period 2. The two black polygons are directed the same way (in the plane). If Fig. 2 is to represent the case $n = 3$, then the arrows of the outside triangle must be reversed.

It appears at once from the diagram that any two operations of these groups are commutative. If n is odd, then it can readily be seen that the group is a cyclic group of order $2n$, since we have in this case $S = (SR)^{n+1}$, $R = (SR)^n$. If, however, n is even, then we apply the following general theorem* concerning commutative groups:

If all the operations of a group are commutative, there is a system of generating operations $S_1, S_2, S_3, \ldots$ *which possesses the property that the products*

$$S_1^{h_1} S_2^{h_2} S_3^{h_3} \ldots \qquad (h_i = 1, 2, 3, \ldots r_i)$$

* Kronecker, Berl. Monatsberichte, 1870, p. 881; Netto, Theory of Substitutions, translated by Cole, p. 159.

include every operation of the group once and only once. The numbers $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *are the periods of* $S_1, S_2, S_3, \ldots$ *and are such that every one is divisible by the next following. The product of these periods* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *is equal to the order of the group.*

In our case, putting $n = 2m$, we may take

$$S_1 = S, \quad S_2 = R,$$

then there is $r_1 = 2m$, $r_2 = 2$, $S^{2m} = 1$, $R^2 = 1$ and the order of the group $r_1 r_2 = 4m$. The operations of the group are indeed given by

$$1, S, S^2, \ldots S^{2m-1}, R, SR, S^2R, \ldots S^{2m-1}R.$$

For $m = 1$ we obtain the four-group. For higher values of m there exists always a four-group as a (self-conjugate) subgroup, given by the operations

$$1, S^m, R, S^mR,$$

which appears immediately from the diagram.

The color-group VIa, whose diagram is given in Fig. 6, where the arrows are to be changed so that the black triangles have alternately opposite directions, represents a group of order 24 which is not related at all to the octahedron group. This appears from the fact that the group VIa contains no operations of period 4; it contains 8 operations of period 6, 8 operations of period 3, and 7 of period 2. The group is very closely connected with the tetrahedron group, which it contains as a self-conjugate subgroup. This relation will be shown in §7.

PART III.

§7.—*The Extended Rotation Groups.*

The principles underlying the above given results are capable of being extended in several directions. The following remark leads to such an extension:

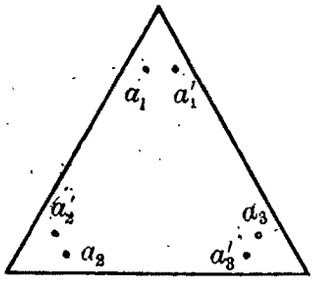
The color-groups consisting of only one generating operation are given by plane one-colored polygons. The simplest method to obtain two-colored groups from these one-colored groups is suggested by the dihedron diagram in Fig. 2: Join every two opposite vertices of two concentric one-colored polygons by a new color line of period 2.

Let us now apply the same principle to the two-colored groups. Take the tetrahedron, octahedron and icosahedron with truncated vertices, polyhedrons which, as we know, represent two-colored groups, surround every one by a similar concentric polyhedron, and join every two opposite vertices by a new, say blue, color line of period 2.

Instead, we may retain the color-groups III, V, VIII in the plane. We lay out in a second sheet, say parallel to the first, the same diagrams and join corresponding points by blue lines.

In this manner we obtain precisely the so-called *extended rotation groups** of the regular bodies, interpreting the blue lines as a reflection on any plane of symmetry and fixing the arrows on the outside sphere, or upper sheet, opposite to those on the inside sphere, or lower sheet.

We have to deal now with a full system of $2N$ points. The faces of the three above-named polyhedrons are triangles. There are two points of the full system in the vicinity of every vertex on every triangle. We keep for the points of the old system of N points the old notation, and distinguish the new points, symmetrically situated with respect to the old ones, by accents. The



adjoined figure shows, for instance, the triangle a of Fig. 12. Each point characterizes one of the $2N$ regions into which one fundamental region† is converted by the $2N$ transformations of the group.

In the case of the tetrahedron we define the blue lines as a reflection on the symmetry plane passing through the edge 1–4 (Fig. 12). The effect will be this permutation of the points: $(a_1 a_1')$, $(a_2 a_3')$, $(b_1 c_1')$, $(b_3 c_2')$, $(b_4 c_4')$, $(d_2 d_3')$, $(d_4 d_4')$, etc.

Above all we have to ascertain whether the diagram described in the upper sheet with the accented points as fundamental points represents again the origi-

* Klein, Icosaëder, p. 23.

† Klein, Icosaëder, p. 22.

nal tetrahedron group. But this follows at once when we observe that the upper diagram can be obtained by reflecting the original diagram III, Fig. 3, on the symmetry line passing through the points a_1, d_4, and by attaching accents to the letters.

This three-colored, three-dimensional diagram, as a whole, represents indeed a color-group, as the truth of theorems 1 and 2 (§1) applied to our case can easily be verified.

According to what has been said about the arrows in the upper sheet, every two corresponding triangles, together with the blue lines joining their corners, represent a dihedron color-group ($n = 3$) analogous to the diagram II, Fig. 2.

All these propositions hold equally true in the case of the octahedron, icosahedron and dihedron.

If, in the case of the octahedron, the blue lines indicate a reflection on the symmetry plane passing through the points 5, 3, 6, 4 (Fig. 13), then the upper sheet of the color-group can be obtained by a reflection of the diagram V, Fig. 5, on the symmetry line bisecting the lines $a_4 b_4$ and $c_4 d_4$.

In the case of the icosahedron we reflect on a symmetry plane passing through the edges 0–4 and 12–8 (Fig. 14). Then the upper sheet of the color-group is obtained by the reflection of the diagram VIII, Fig. 8, on the symmetry line passing through the points a_{12}, f_8, a_0, f_4.

The extension of the dihedron groups I and II hardly requires any further explanation.

We obtain three-colored three-dimensional groups of an entirely different character when we agree to let the arrows in the upper sheet run the *same* way as in the lower sheet. I mention only two cases.

First, the color-group of type IIa, for $n = 2m$, furnishes, when extended in this way, *a commutative group of order* $8m$.

In the second place, the tetrahedron color-group III, Fig. 3, is extended by this method to a three-colored group of order 24, which is holohedrically isomorphic to the color-group VIa explained at the end of §6. To establish this isomorphism, it suffices to show the connection between the generating operations—colors—of the two groups. Denoting in the group VIa the generating operation of period 3, converting a_2 into a_3, c_2 into b_6, c_1 into d_4, b_1 into d_5 (cf. the modified Fig. 6) by S, and by R the operation indicated in the same figure

by red lines, and putting

$$RSRS^{-1} = U, \ (RS)^3 = B$$

(U and B are both of period 2), then S and U generate a tetrahedron color-group of type III, and taking now B for the blue lines, we obtain precisely the three-dimensional three-colored group of order 24 described above. We observe that all the triangles of the diagram VIa of one direction lie in one sheet of the three-colored group, all those of the other direction in the other sheet.

§8.—*Three-colored "Regular" Color-groups.*

The color-group of the extended dihedron, obtained by the methods of §7 from diagram I, can be spread out in a plane, as shown in Fig. 16, where the blue lines are represented as dotted lines, ... The group affords an example of a "regular" three-colored group, i. e. a color-group of three colors whose lines do not meet except in the fundamental points.

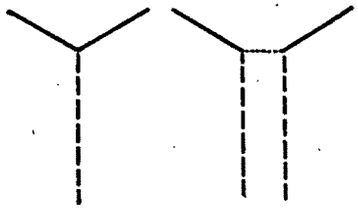
With regard to these regular three-colored groups there holds the general theorem, which is readily seen to be true in the special case represented by Fig. 16, that *every one of the three generators of such a group must be of period* 2.

To show this, let us denote the three colors by S (black), R (red) and B (blue). If now we drop one of the colors, say the B-lines, there remain two-colored groups C_2, i. e. diagrams given by one of the Figs. 1–10.

To fix the ideas, let the groups C_2 be tetrahedron color-groups of the type III, Fig. 3. Consider now the B-lines emanating from the corners of the triangle in the center of one of the diagrams III. These lines cannot lead to any other point of III, otherwise B would be expressible in terms of S and R. The B-lines must, therefore, terminate somewhere in the interior of III. Again, the end points of the B-lines must hang together with other tetrahedron groups C_2, which must lie entirely inside the diagram III just considered, without having any point with III in common. But this conclusion can be repeated with regard to every one of these interior tetrahedron groups C_2, etc., *in infinitum.*

Consequently the color-groups C_2 cannot be tetrahedron groups. But the same demonstration applies to octahedron, icosahedron and dihedron groups of type II (including evidently also the cases VIa and IIa), and that means, there cannot exist any color lines of periods higher than two. Q. E. D.

Besides the extended dihedron groups, Fig. 16, we obtain other regular three-colored groups in the following way:



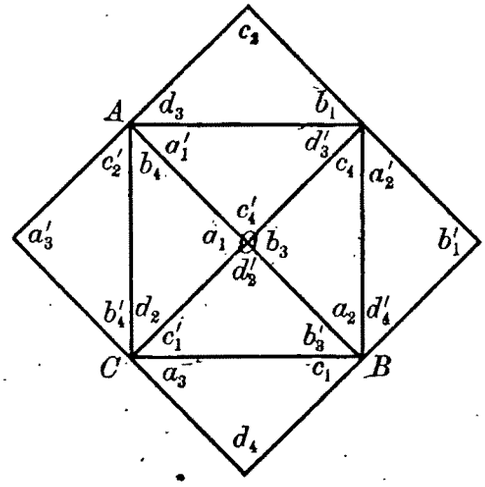
In the diagrams III, V, VI, VIII and IX, given by Figs. 3, 5, 6, 8, 9, we truncate the corners of the black polygons by blue lines and replace accordingly every red line by two red lines, as shown in the adjoined figures, where the left figure shows the original, the right one the modified form.

This process amounts to the same effect as that produced by truncating on the regular bodies first the edges and then the vertices so far as to obtain polygons of twice as many sides as there were edges concurring in the original vertices.

The resulting diagrams are three-colored regular color-groups, and these color-groups represent again the extended rotation groups of the regular bodies, as will appear from the examination of the single cases.

Fig. 17 shows *the extended tetrahedron group* with the notation given in §7. The blue lines signify a reflection B on the symmetry plane passing through the edge 1–4 (Fig. 12), the red lines the operation BT, where T represents the rotation of period 2, defined by red lines in diagram III (cf. Fig. 3 and page 172), the black lines the operation BS, where S represents the rotation of period 3, defined by black lines in III (cf. Fig. 3 and page 172).

The same color-group (Fig. 17) represents also the octahedron group.



This remarkable relation appears indeed when we denote the 24 fundamental points of the octahedron group as shown in the adjoined figure, and when now we interpret the blue lines (Fig. 17) as a rotation of period 2 about the middle of OA, the red lines as a rotation of period 2 about the middle of OB, and the black lines as a rotation of period 2 about the middle of BC.

*The extended tetrahedron group is therefore holohedrically isomorphic to the octahedron group.**

The three-colored regular color-group belonging to *the extended octahedron group* is represented in Fig. 18 with the notations given in §7. It may be derived as well from the diagram V, Fig. 5, as from VI, Fig. 6, by the above defined process. The blue lines indicate the rotation T of diagram V (cf. page 173), the black lines the rotation STS^2T, where S of period 3 is defined by the black lines in V (cf. page 173), and the red lines a reflection on the symmetry plane passing through the vertices 4, 6, 3, 5 (Fig. 13).

Finally, the extended icosahedron group can be derived by our process from diagram VIII, Fig. 8, or IX, Fig. 9, using the following three operations of period 2:

1) a reflection B on any symmetry plane;

2) the operation BS, where S is defined by the black lines of VIII (cf. page 173);

3) the operation BT, where T is defined by the black lines of VIII (cf. page 173).

While the extended tetrahedron group, as we have seen, is holohedrically isomorphic with the octahedron group, i. e. the symmetric group of 4 elements, such an isomorphism does not exist between the extended icosahedron group and the symmetric group of 5 elements.

PART IV.

§9.—*The Rotation Groups of the Regular Bodies of Four-dimensional Space.*

We obtained the color diagrams of the rotation groups of the regular three-dimensional bodies by truncating the vertices or edges of these polyhedrons. The analogous process applied to the regular four-dimensional bodies leads to a

* I have not found this fact stated anywhere else.

color representation of the rotation groups converting these bodies into themselves.

First of all, we project the four-dimensional bodies into three-dimensional space, so that we obtain the well-known Schlegel-Brill models, which, on their part, define the four-dimensional bodies* uniquely, viz.:

the 5-*cell*, consisting of 5 tetrahedrons, 5 vertices, 10 faces and 10 edges;
the 8-*cell*, with 8 hexahedrons, 16 vertices, 24 faces and 32 edges;
the 16-*cell*, with 16 tetrahedrons, 8 vertices, 32 faces and 24 edges;
the 24-*cell*, with 24 octahedrons, 24 vertices, 96 faces and 96 edges;
the 120-*cell*, with 120 dodecahedrons, 600 vertices, 720 faces and 1200 edges;
the 600-*cell*, with 600 tetrahedrons, 120 vertices, 1200 faces and 720 edges.

The 16-cell, dual to the 8-cell, and the 600-cell, dual to the 120-cell, yield the same rotation groups as their duals, and may accordingly be omitted in the following.

We now apply the process of truncation to the three-dimensional projections of the regular bodies, so that we obtain color diagrams situated in three-dimensional space, in perfect analogy with the two-dimensional diagrams (Figs. 1–10) representing the truncated three-dimensional regular bodies.

In every vertex of the 5-cell, 8-cell and 120-cell there are 4 concurring edges; in every vertex of the 24-cell, 8 edges. To fix the ideas, we assume these 4 bodies constructed of blue threads, and now we replace every vertex of the 5-, 8- and 120-cell by tetrahedrons, every vertex of the 24-cell by hexahedrons—which polyhedrons we think of as constructed of red threads—in such a manner that, for instance, the 4 blue threads, originally concurring in one vertex of the 120-cell, are now attached to the vertices of the substituted tetrahedron. In this way we obtain, reverting to four-dimensional space, four-dimensional bodies whose vertices are, so to speak, truncated by three-dimensional spaces.

But while the analogous process performed on the three-dimensional regular bodies, explained in §5, was already sufficient in order to furnish color-groups, since in that case the polygons substituted in place of the vertices represented already one-colored color-groups, we have now to proceed one step further. In

* Cf. Schlegel, Theorie der homogenzusammengesetzten Raumgebilde, Nova Acta d. Kais. Leop.-Carol. deutschen Academie, Bd. 44, No. 4; Stringham, On Regular Figures in n-Dimensional Space, American Journal, vol. II; Van Oss, Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen, Dissertation, Giessen, 1894; a. o.

the substituted tetrahedrons and hexahedrons we again truncate their vertices, i. e. we replace every (red) vertex by a triangle consisting of black threads. Finally we have to replace every one of the blue threads leading originally to the vertices of the red polyhedrons by three, say parallel, blue threads leading now to the three corners of the black triangles which have been substituted in place of the (red) vertices.

The three-colored thread models thus obtained represent indeed color-groups, if we define the direction of the lines as follows: The direction of the black lines is such that every black triangle is circumscribed by the arrows *positively* when the truncated tetrahedron or hexahedron on which the triangle lies is viewed from an outside point. The blue and red lines are both double lines, i. e. of period 2. We now have leading *from* and *to* every point of our model a blue, a red, and a black line. Again it is a consequence of the regularity of the corresponding four-dimensional body that every route leading back from one point to the same point will lead back from every point to the same point.

We have now before us 4 three-colored groups, two of whose generating operations are of period 2, one of period 3. The number of the resp. fundamental points, i. e. the points in which the black, red, and blue lines meet, gives us the order of the group concerned, viz. 60 for the 5-cell, 192 for the 8-cell, 576 for the 24-cell, and 7200 for the 120-cell, because these points constitute general point systems on the regular bodies.

These color-groups are holohedrically isomorphic to the rotation groups converting the regular four-dimensional bodies into themselves.

There is a certain degree of choice as to the definition of rotations in four-dimensional space.* If we fix the vertices of the regular bodies by the 4 coordinates x, y, z, w of a coordinate system whose origin lies in the center of the resp. regular body, then these vertices lie on a spherical space

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \text{const.}$$

Let us agree then *to define a rotation about the center by an orthogonal substitution of the* 4 *coordinates* x, y, z, w *with* $+1$ *as determinant of substitution.*

But these orthogonal, quaternary substitutions can also be interpreted as collineations of three-dimensional space with regard to the homogeneous vari-

* Cf. Cole, On Rotations in Space of Four Dimensions, American Journal, vol. XII, p. 191.

ables x, y, z, w, leaving the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \tag{19}$$

unaltered.

Now it is a known fact that every collineation of ordinary space that converts a quadric surface into itself can be reduced in a certain manner to a combination of two binary substitutions.* To show this, let us consider the two series of straight lines on the quadric surface S_2, which may be defined by the parameters ξ and η. Every collineation converting the S_2 into itself transforms either the lines of the ξ-system and those of the η-system into themselves, or it interchanges the two systems. Accordingly the parameter ξ is transformed by a linear, non-homogeneous substitution, and also the parameter η or ξ is transformed linearly into η, and vice versa.

In the case where the quaternary substitutions defining the collineation in question are *orthogonal*, i. e. where the S_2 is given by equation (19), the connection between the linear substitutions of the quantities ξ, η, which we may write homogeneously as $\xi = \xi_1 : \xi_2$, $\eta = \eta_1 : \eta_2$, and those of the quantities x, y, z, w, can be brought about by the following formulæ:

$$\left.\begin{array}{lll} \rho x = & \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 \text{ and } & \sigma . \xi_1 \eta_1 = \quad y + iz\,, \\ \rho y = & -\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 & \sigma . \xi_1 \eta_2 = -x - iw, \\ \rho z = & i(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) & \sigma . \xi_2 \eta_1 = -x + iw, \\ \rho w = & i(-\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) & \sigma . \xi_2 \eta_2 = -y + iz\,, \end{array}\right\} \tag{20}$$

where ρ and σ are factors of proportionality.

Again it can be shown that if the determinant Δ of the orthogonal substitution is $= +1$, then the first of the two above-mentioned cases holds, viz. ξ is transformed linearly, and also η, while in the case $\Delta = -1$, ξ is linearly transformed into η and η into ξ.

There corresponds consequently to every group of rotations converting one of the four-dimensional regular bodies into itself, an isomorphic group of simultaneous binary substitutions of the form

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{l\eta + m}{n\eta + p}. \tag{21}$$

---

* See Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, Ann. de l'École Norm. Sup., 1889; cf. also Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II, p. 356 ff.

The isomorphism is hemihedrical as soon as, in the quaternary substitution group representing the rotation group, a simultaneous change of signs of all the 4 variables occurs. Such a change of signs has no effect upon the formulæ (20), so that indeed to every substitution (21) there correspond two substitutions of the quantities x, y, z, w.

Since the groups in consideration are all of finite orders, the groups formed by the binary substitutions (21), taken with respect to the single quantities ξ or η, must be contained among the known rotation groups of the regular three-dimensional bodies. The ξ's and the η's may be substituted according to the same or to different groups. A complete solution of the problem to find all the finite groups possible, formed by the simultaneous binary substitutions of two quantities ξ and η, has been given by Goursat, l. c.

In order to establish the isomorphism between the 4 above defined color-groups and the four-dimensional rotation groups on one hand and the resp. ξ, η-groups on the other, I shall in the following define analytically the 3 generating operations S of period 3, represented by the black lines, R of period 2, represented by the red lines, and B of period 2, represented by the blue lines. With regard to the values of the coordinates by which the vertices of the regular four-dimensional bodies are determined, we avail ourselves of a paper by Puchta,* where a complete table of these values can be found.

The 5-cell.

Coordinates of the vertices 1–5:

	1	2	3	4	5
x	1	1	-1	-1	0
y	1	-1	-1	1	0
z	1	-1	1	-1	0
w	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{-4}{\sqrt{5}}$

* Puchta, Analytische Bestimmung der reg. conv. Körper im Raum von vier Dimensionen, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 89, 1884.

For S, R, B we take in the quaternary group these substitutions:

$$S\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x, \\ w' = w, \end{cases} \quad R\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \\ z' = -z, \\ w' = w, \end{cases} \quad B\begin{cases} -4x' = x + y - 3z + \sqrt{5}.w, \\ -4y' = x - 3y + z + \sqrt{5}.w, \\ -4z' = -3x + y + z + \sqrt{5}.w, \\ -4w' = \sqrt{5}.x + \sqrt{5}.y + \sqrt{5}.z + \sqrt{5}.w. \end{cases}$$

S and R generate indeed a tetrahedron group consisting of those 12 substitutions which are obtained by combining all the even permutations of x, y, z with an even number of changes of signs. The vertices 1–5 of the 5-cell are permuted by S, R, B as follows:

$$S \equiv (234), \quad R \equiv (14)(23), \quad B \equiv (15)(23).$$

Hence *the rotation group of the 5-cell is precisely the icosahedron group consisting of the even permutations of the vertices* 1–5.

According to the color-group, SB must be of period 2 and RB of period 3; we find indeed $SB \equiv (15)(34)$ and $RB \equiv (145)$. S and B generate a dihedron group ($n = 3$) whose color-group consists of the black and blue lines.

The ξ, η-substitutions are given by these formulæ:

$$S\begin{cases} \xi' = i\dfrac{\xi+1}{\xi-1}, \\ \eta' = i\dfrac{\eta+1}{\eta-1}, \end{cases} \quad R\begin{cases} \xi' = \dfrac{1}{\xi}, \\ \eta' = \dfrac{1}{\eta}, \end{cases} \quad B\begin{cases} \xi' = \dfrac{2\xi - (1-\sqrt{5})\left[-1 + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})\right]}{(1-\sqrt{5})\left[1 + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})\right]\xi - 2}, \\ \eta' = \dfrac{2\eta - (1+\sqrt{5})\left[-1 + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})\right]}{(1+\sqrt{5})\left[1 + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})\right]\eta - 2}, \end{cases}$$

ξ and η alone are substituted according to an icosahedron group. Every ξ-substitution is combined with that η-substitution which is obtained from the ξ-substitution by interchanging $+\sqrt{5}$ with $-\sqrt{5}$. The group is identical with Goursat's group No. XXXII.*

The ξ, η-group is *holohedrically* isomorphic to the rotation group, because in the corresponding quaternary substitution group a simultaneous change of signs does not occur.

---

*l. c., page 68.

The 8-cell.

The coordinates of the 16 vertices have the values

$$x, y, z, w = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1.$$

We take here

$$S\begin{cases} x' = y, \\ y' = w, \\ z' = z, \\ w' = x, \end{cases} \qquad R\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \\ z' = w, \\ w' = z, \end{cases} \qquad B\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \\ z' = -z, \\ w' = w. \end{cases}$$

S and R generate a tetrahedron group consisting of all the even permutations of x, y, z, w. Combining the same with B, we obtain the complete group. *The rotation group of the 8-cell consists therefore of all those substitutions that are obtained by forming the symmetric permutation group of the 4 quantities x, y, z, w, combined with all changes of signs possible and retaining those of determinant $+1$.*

The order is accordingly, as it ought to be, $\frac{24 \cdot 24}{2} = 192$. As the formulæ show, SB is of period 2, RB of period 4, which agrees with the color-group. S and B generate a dihedron ($n = 3$), etc.

The ξ, η-group is given by

$$S\begin{cases} \xi' = \dfrac{i-\xi}{i+\xi}, \\ \eta' = \dfrac{i-\eta}{i+\eta}; \end{cases} \qquad R\begin{cases} \xi' = -\xi, \\ \eta' = \dfrac{1}{\eta}, \end{cases} \qquad B\begin{cases} \xi' = \dfrac{\xi+1}{\xi-1}, \\ \eta' = \dfrac{\eta+1}{\eta-1}. \end{cases}$$

This is Goursat's Group No. XXVII* of order 96; it is hemihedrically isomorphic to the rotation group, since the latter contains indeed a simultaneous change of signs of x, y, z, w.

The 24-cell.

The 24 vertices of the 24-cell have the coordinates

$$x, y, z, w = \pm 1, \pm 1, 0, 0.$$

---

* l. c., page 67.

We take

$$S\begin{cases} x' = y, \\ y' = -z, \\ z' = -x, \\ w' = w, \end{cases} \qquad R\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \\ z' = -z, \\ w' = w, \end{cases} \qquad B\begin{cases} 2x' = -x+y+z+w, \\ 2y' = x-y+z+w, \\ 2z' = x+y+z-w, \\ 2w' = x+y-z+w. \end{cases}$$

S and R generate the octahedron group consisting of all the substitutions of determinant $+1$ that are contained in the group which arises by combining all permutations of x, y, z with all possible changes of signs of these 3 quantities. BS is of period 2, BT of period 3.

The ξ, η-group is given by

$$S\begin{cases} \xi' = i\dfrac{1+\xi}{1-\xi}, \\ \eta' = i\dfrac{1+\eta}{1-\eta}, \end{cases} \qquad R\begin{cases} \xi' = \dfrac{\xi+1}{\xi-1}, \\ \eta' = \dfrac{\eta+1}{\eta-1}, \end{cases} \qquad B\begin{cases} \xi' = \dfrac{i}{\xi}, \\ \eta' = i\dfrac{\eta+i}{\eta-i}. \end{cases}$$

This group can be described as follows: Substitute the ξ's and η's separately according to the tetrahedron group in that normal form which is given in Klein's "Icosaëder," page 42, equations (30a). Now combine every ξ- with every η-substitution. Thus a group of 12.12 substitutions is obtained. If, finally, we associate the substitution $\xi' = i\xi$, $\eta' = i\eta$, we obtain the complete ξ, η-group of order $2.12.12 = 288$, Goursat No. XXVIII,* which is hemihedrically isomorphic to the rotation group of the 24-cell of order 576.

The following formulæ show that the ξ, η-substitutions, generated by S, R, B, form indeed the group of order 288 just described. We find

$$(BRS^2)^2: \begin{cases} \xi' = \xi, \\ \eta' = \dfrac{\eta+i}{\eta-i}, \end{cases} \qquad (SBR)^3: \begin{cases} \xi' = \xi, \\ \eta' = -\dfrac{1}{\eta}, \end{cases}$$

$$(SBR)^2: \begin{cases} \xi' = i\dfrac{1-\xi}{1+\xi}, \\ \eta' = \eta, \end{cases} \qquad (BRS^2)^3: \begin{cases} \xi' = \dfrac{1}{\xi}, \\ \eta' = \eta, \end{cases}$$

$$(RS)^2: \begin{cases} \xi' = i\xi, \\ \eta' = i\eta. \end{cases}$$

---

*l. c., page 68.

The two substitutions $(BRS^2)^2$ and $(SBR)^3$ leave ξ unchanged and generate with regard to η the tetrahedron group, while $(SBR)^2$ and $(BRS^2)^3$ leave η unchanged and generate with regard to ξ the same tetrahedron group.

The 120-*cell.*

The rotation group of the 120-cell, which is isomorphic to the color-group of order 7200 generated by S, R, B, could be defined in a similar way, as has been done in the preceding cases, by 3 quaternary substitutions S, R, B, and likewise the ξ, η-group of order 3600, hemihedrically isomorphic to it. The computations, however, required for that purpose are rather complicated. With regard to the ξ, η-group the result can easily be anticipated. According to Goursat's investigations, there exists only one ξ, η-group of order 3600 (none of order 7200). We obtain this group—enumerated as No. XXX*—by subjecting ξ as well as η to all the substitutions of an icosahedron group and combining every ξ- with every η-substitution.

UNIVERSITY OF CHICAGO, *November* 29, 1895.

---

* l. c., page 68.

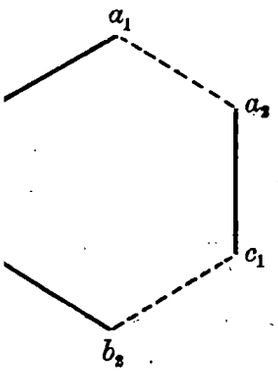


FIG. 1.

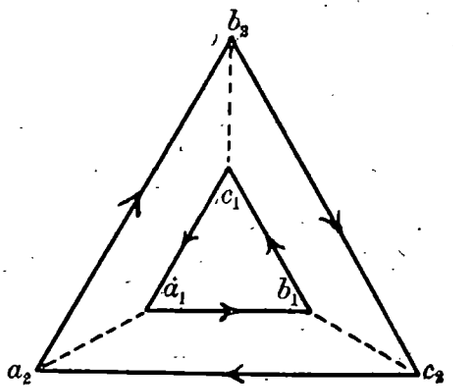


FIG. 2.

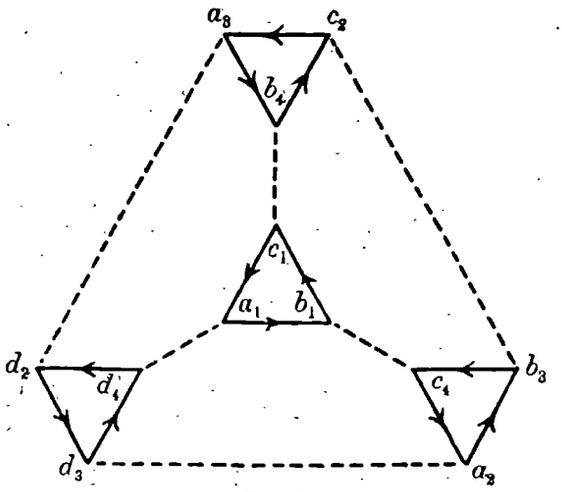


FIG. 3.

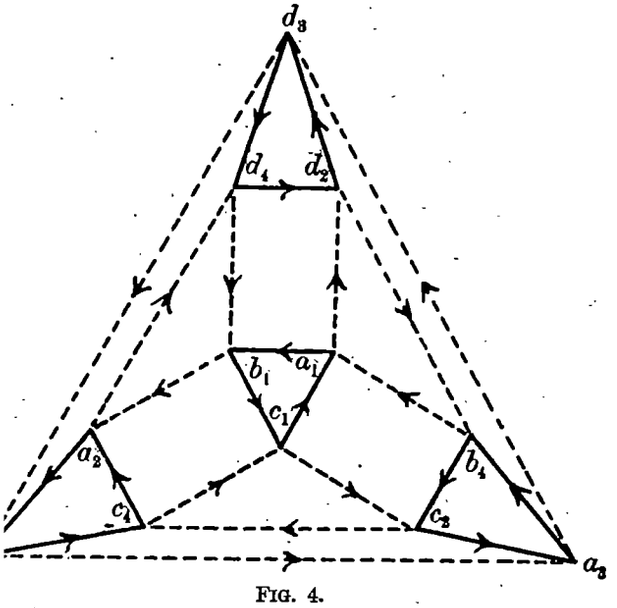


FIG. 4.

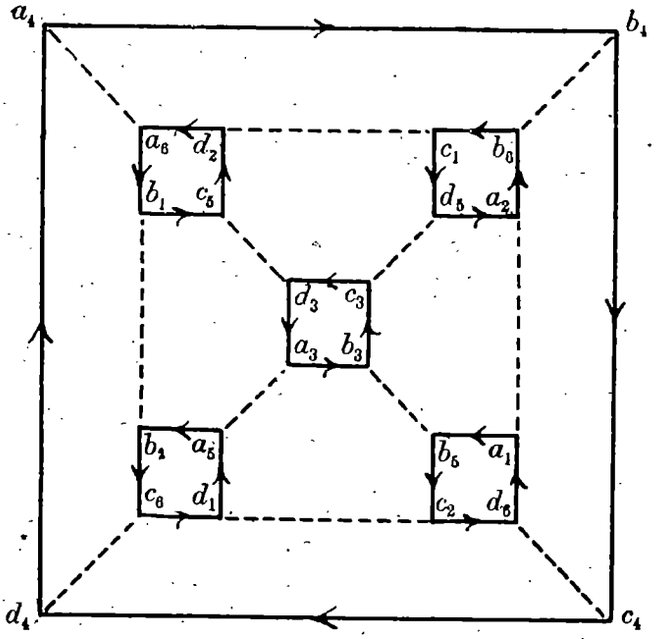


FIG. 5.

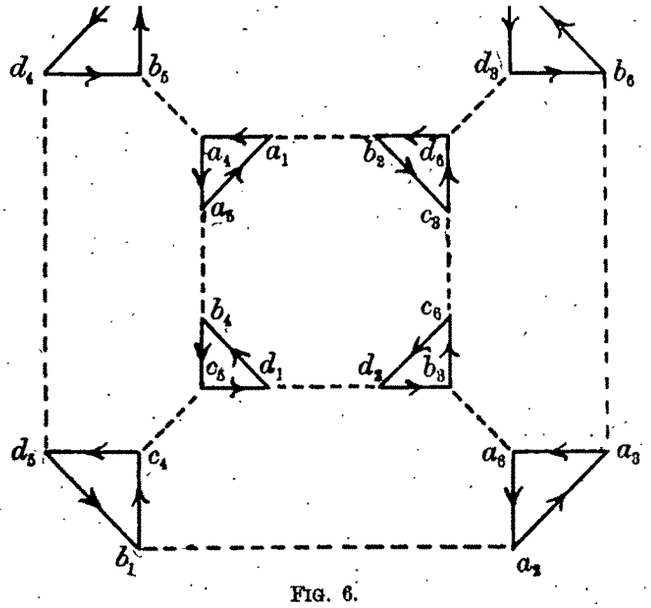


FIG. 6.

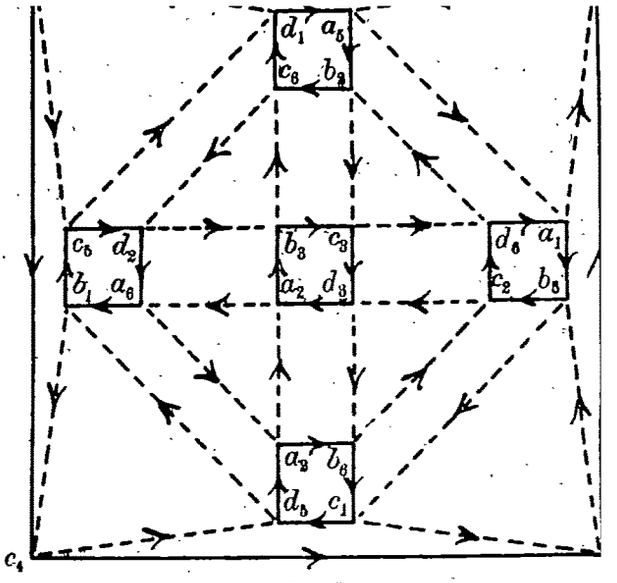


FIG. 7.

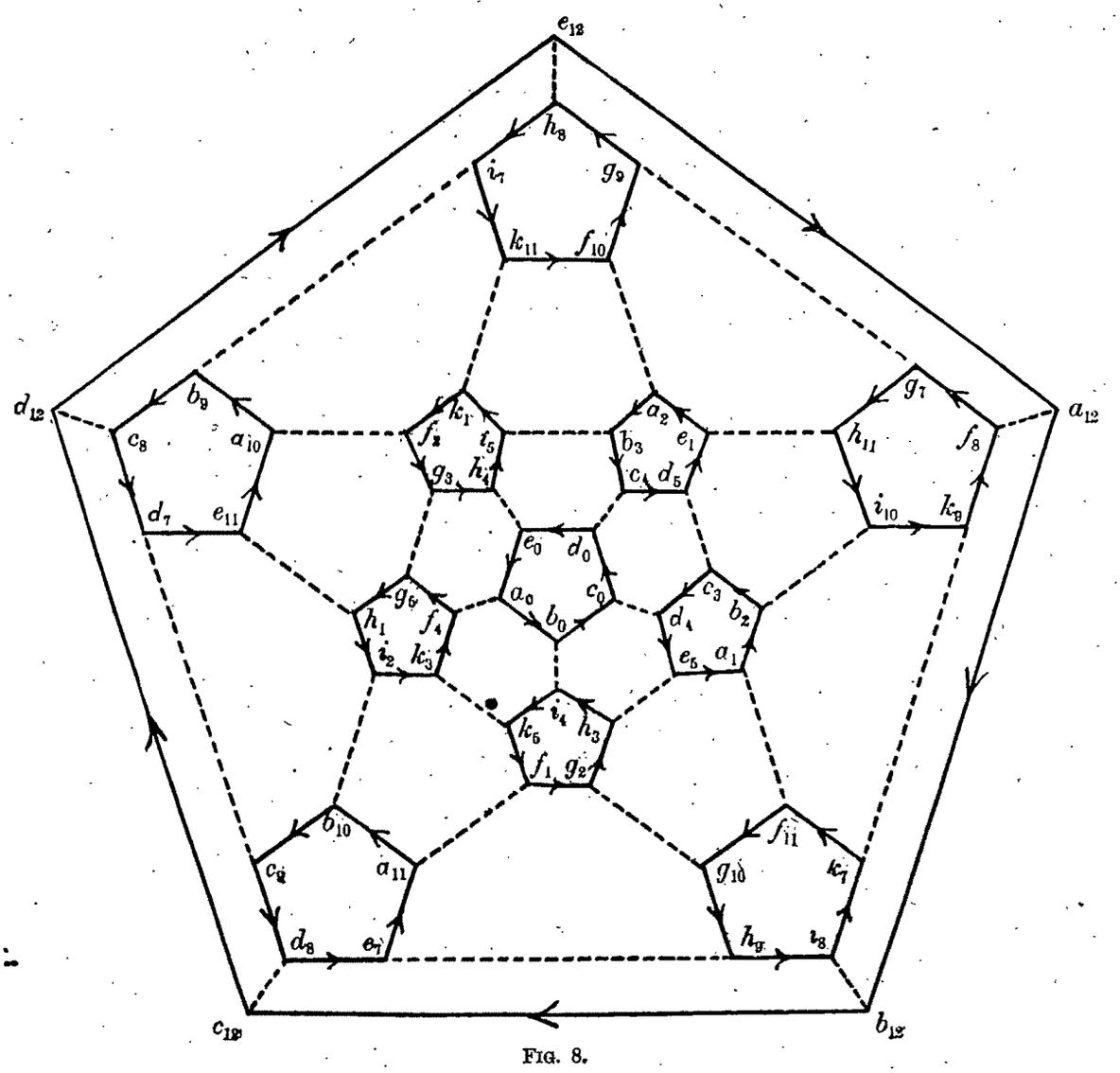


FIG. 8.

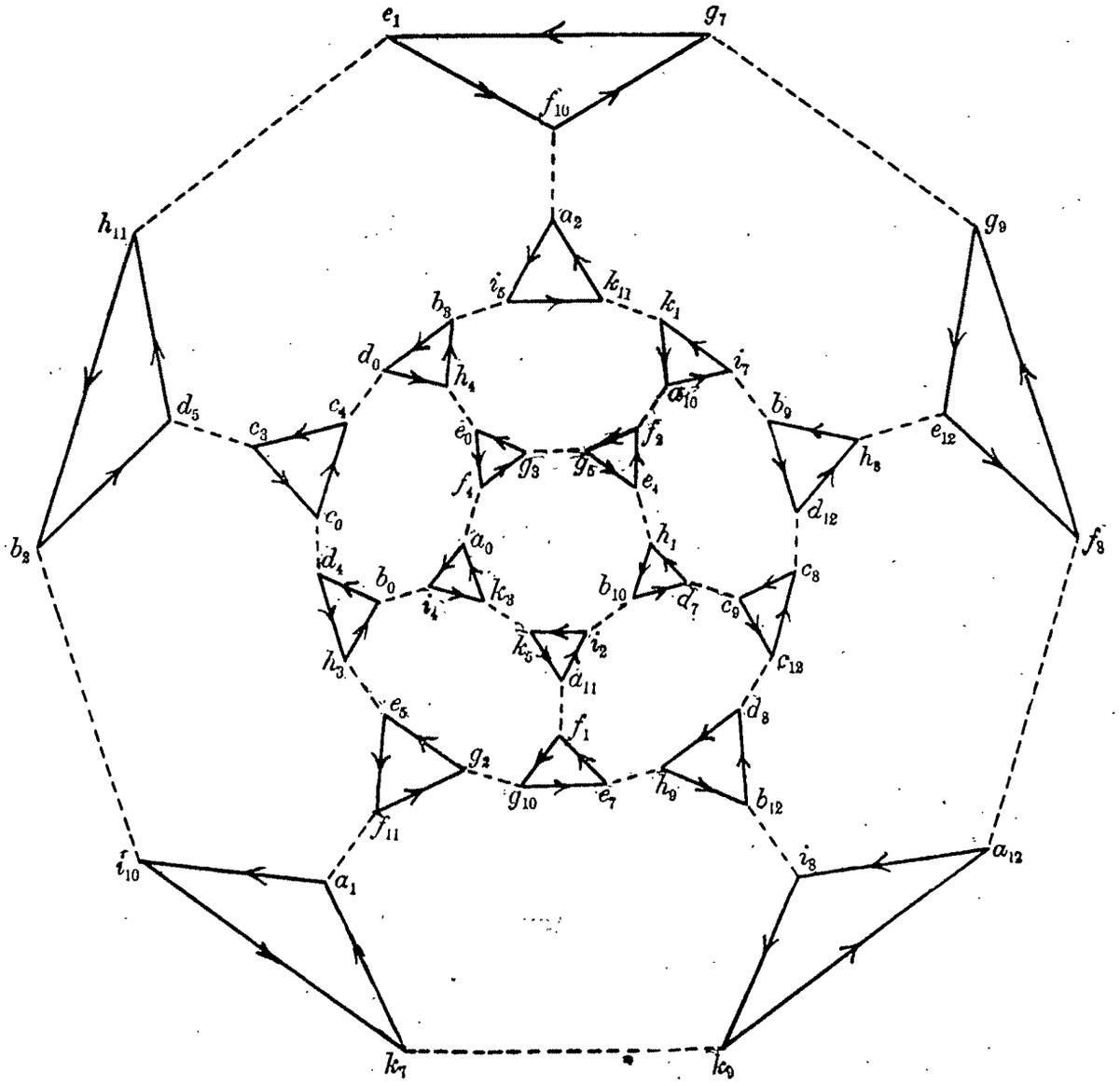

e_1
g_7
f_{10}
a_2
h_{11}
g_9
i_5
k_{11}
b_3
k_1
d_0
h_4
i_7
a_{10}
d_5
c_4
c_3
b_9
e_0
f_2
e_{12}
h_8
g_3
g_5
f_4
e_4
c_0
d_{12}
f_8
b_2
a_0
h_1
d_4
b_0
c_8
k_3
b_{10}
i_4
d_7
c_9
k_5
i_2
h_3
c_{12}
a_{11}
e_5
d_8
f_1
g_2
g_{10}
e_7
h_9
b_{12}
f_{11}
i_{10}
a_1
i_8
a_{12}
k_7
k_9

FIG. 9.

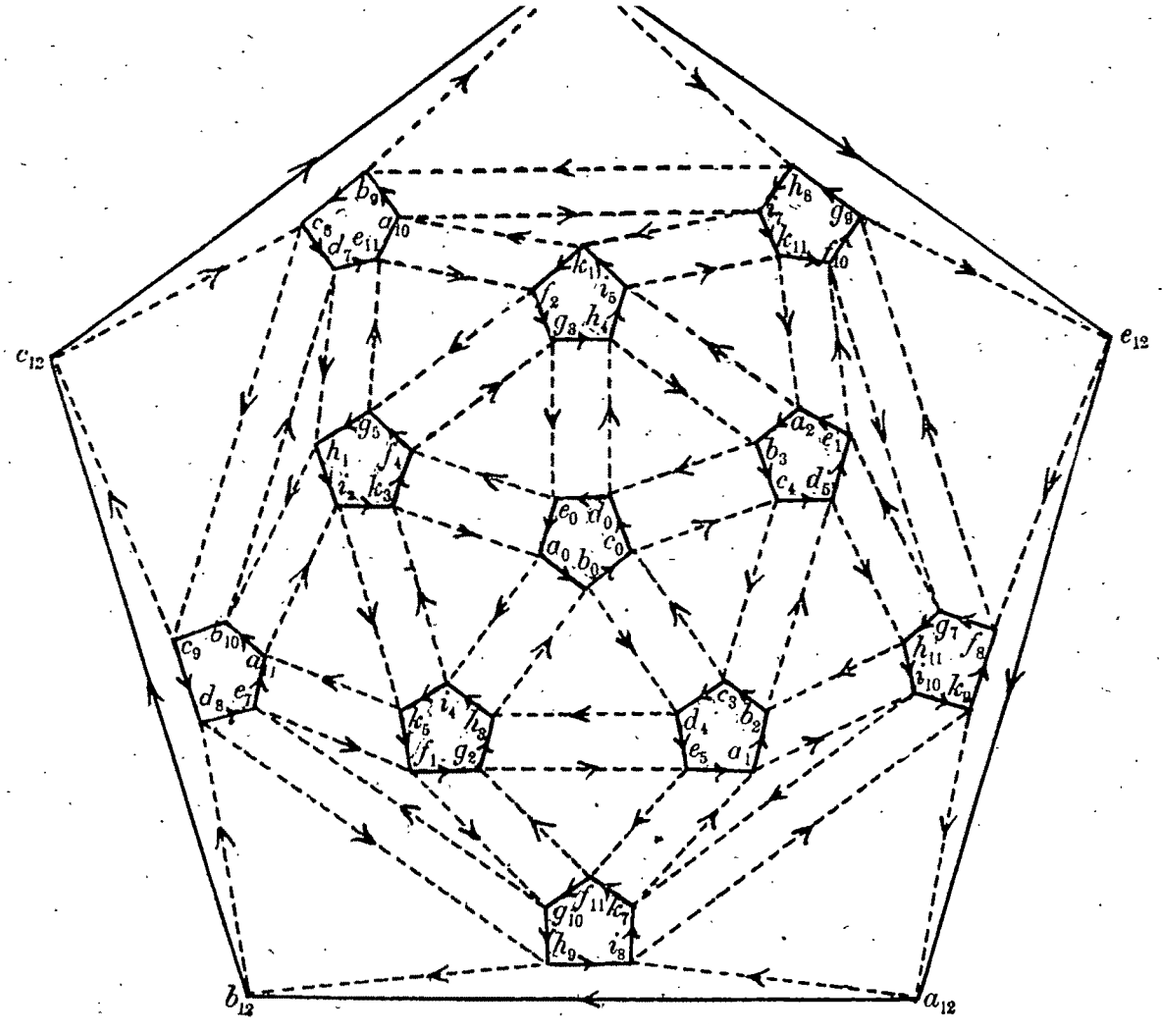


FIG. 10.

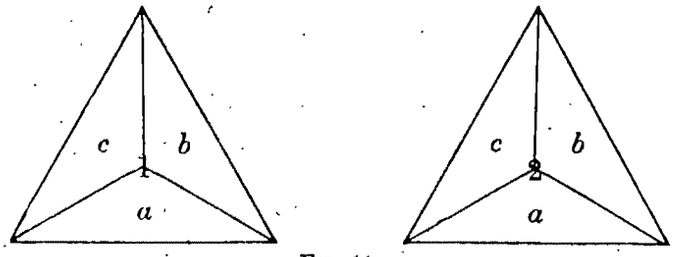


FIG. 11.

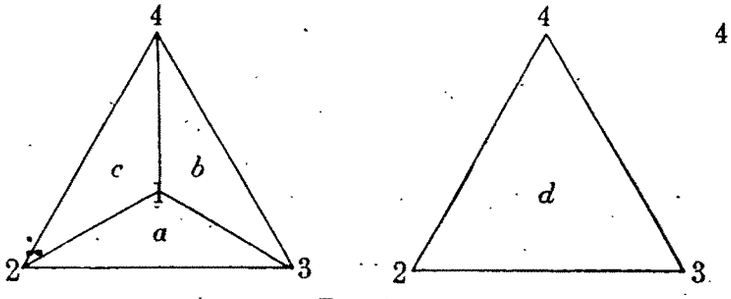


FIG. 12.

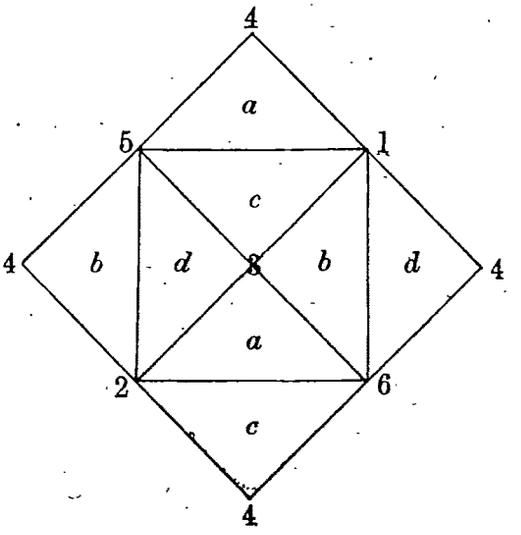


FIG. 13.

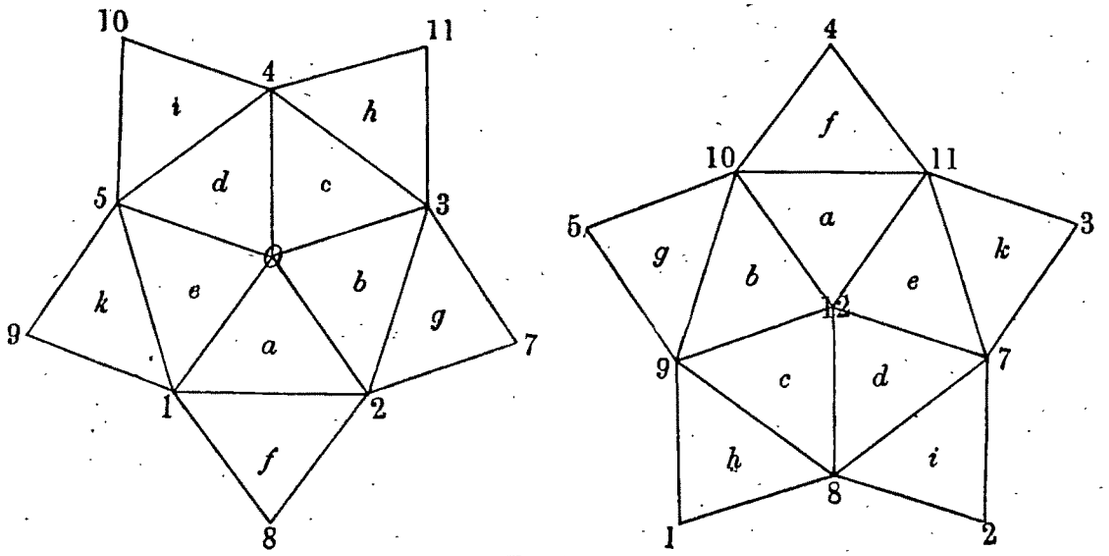

10
11
4
i
h
d
c
5
3
12
k
e
b
g
9
a
7
1
2
f
8
4
f
10
11
5
a
3
g
b
e
k
12
9
7
c
d
h
i
8
1
2

FIG. 14.

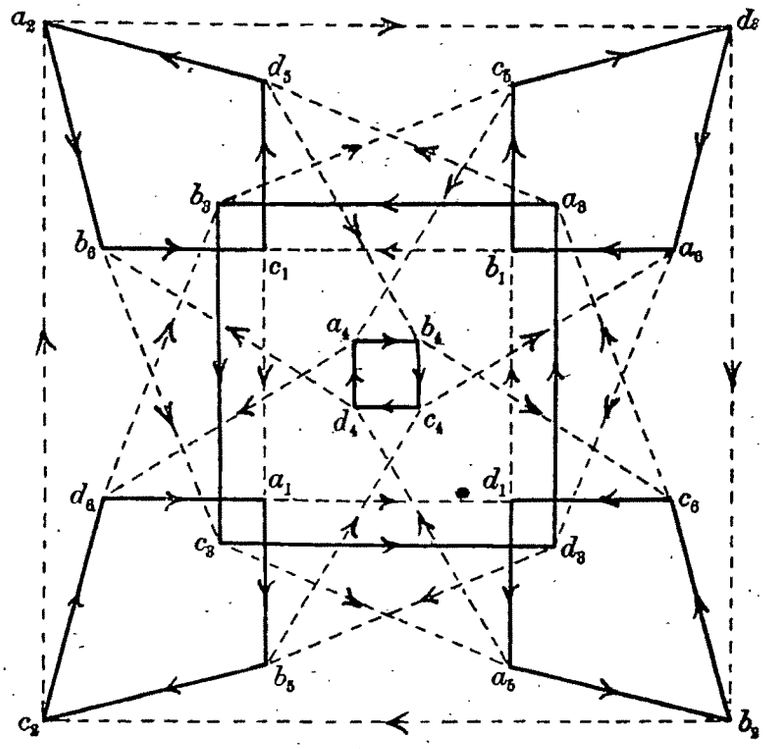

a_2
d_2
d_5
c_5
b_3
a_3
b_6
c_1
b_1
a_6
a_4
b_4
d_4
c_4
d_6
a_1
d_1
c_6
c_3
d_3
b_5
a_5
c_2
b_2

FIG. 15.

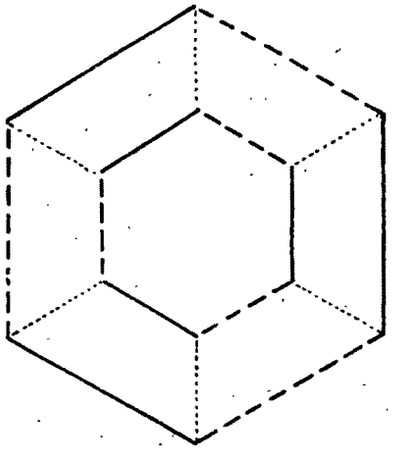


FIG. 16.

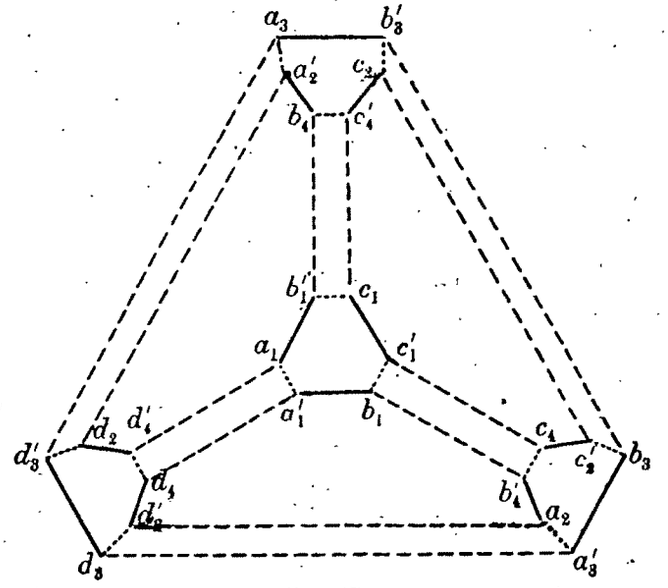


FIG. 17.

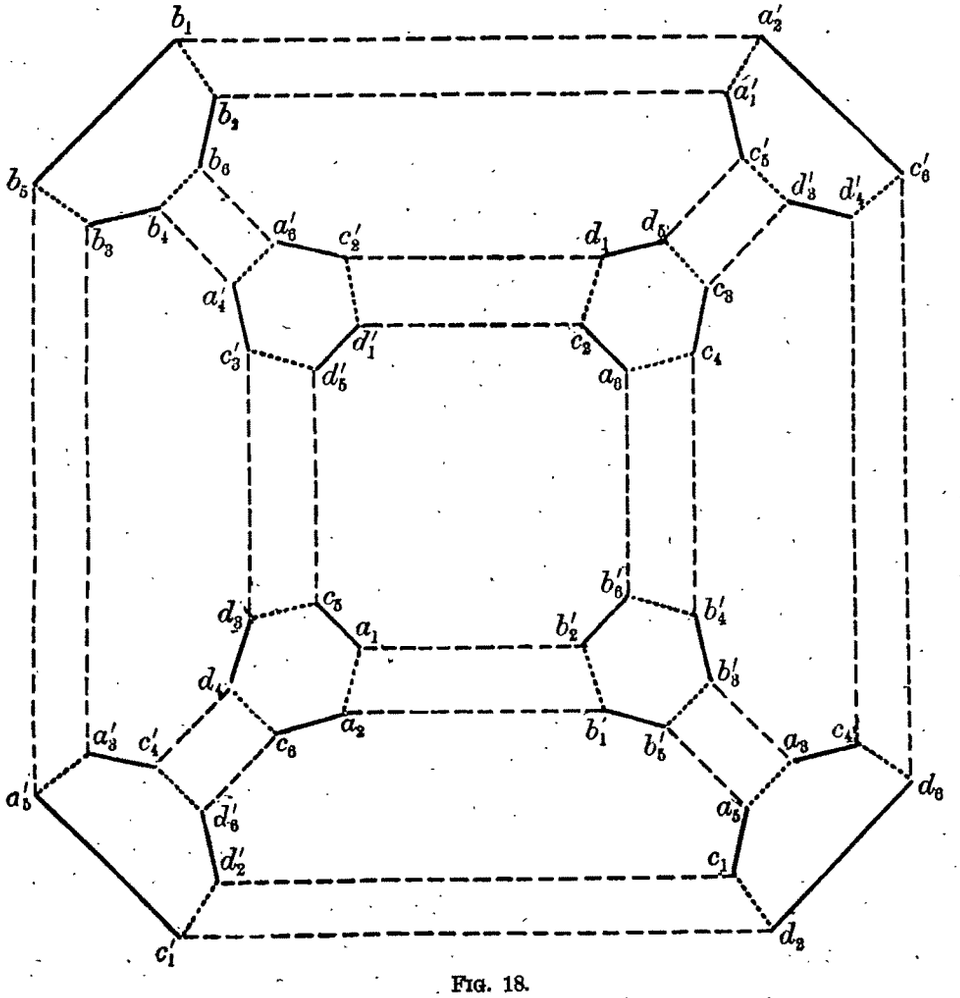


FIG. 18.

On the Multiplication and Involution of Semi-convergent Series.

By Florian Cajori.

§1. In the raising of an absolutely convergent series by Cauchy's multiplication rule to any positive integral power, no tests of the convergence of the product-series are needed, but the case of semi-convergent series is more difficult. Theorems on the convergence of the product of two semi-convergent series have been given by Abel (Crelle's Journal, vol. I, pp. 311–339); A. Pringsheim (Math. Ann., vol. XXI, p. 327; XXVI, p. 157), and A. Voss (Math. Ann., vol. XXIV, p. 42). In the Am. Jour. of Math., XV, p. 339, the writer generalized Voss's results to the following effect: *The necessary and sufficient conditions that the product of two semi-convergent series Σa_n and Σb_n, of which one, say Σa_n, becomes absolutely convergent on associating its terms into groups having the same number p of terms, converge towards the product of the sums of the two given series, are that the nth term and all succeeding terms of the product-series shall approach the limit zero as n increases indefinitely, and that the following relation be satisfied:**

$$\lim_{m=\infty}\sum_{i=0}^{i=m-1}\{b_{pi+2}\,a_{pm-pi-1}+b_{pi+3}\,(a_{pm-pi-2}+a_{pm-pi-1})+\cdots\cdot \\ +b_{pi+p}\,(a_{pm-pi-p+1}+\cdots\cdot+a_{pm-pi-1})\}=0. \qquad \text{I}$$

In this equation $pm=n$. In case of powers of semi-convergent series higher than the second, the tests offered by the theorems referred to are, as a rule, practically inoperative on account of the complexity of the expressions involved.

The search for expeditious tests on the applicability of Cauchy's multiplica-

* In the Bull. of the Am. Math. Soc., 2d series, vol. I, pp. 180–188, the writer has deduced the necessary and sufficient conditions for convergence in the more general case when the number of terms in the various groups is not necessarily the same.

tion rule to powers of semi-convergent series higher than the second power, has given rise to the following investigation which begins with alternating semi-convergent series and ends with certain trigonometric series.

§2. If the signs of the terms of each of two series are alternately plus and minus, then the product-series has its terms alternately plus and minus, and all the individual products, $a_{n-x}b_x$, which enter into the composition of any one term, $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$, in the product-series, have like signs in that term. This theorem is easily verified.

§3. If the signs of the terms in each of two semi-convergent series are alternately plus and minus, and if one of the two series becomes absolutely convergent on associating its terms into groups of two terms each, then conditions I are satisfied and the product-series is convergent, whenever the nth term and all succeeding terms of the product-series approach the limit zero as n increases indefinitely.

Proof.—When $p = 2$, then formula I demands that the sum of certain products, $a_{n-x+1}b_x$, which enter into the composition of the $(n+2)^{\text{th}}$ term, $(a_{n+1}b_0 + a_n b_1 + \dots + a_0 b_{n+1})$, shall approach the limit zero as n increases indefinitely. Now, *if* the entire $(n+2)^{\text{th}}$ term approaches the limit zero, then, since all the constituents, $a_{n-x+1}b_x$, have like signs (§2), it follows at once that the sum of any selected number of those constituents must approach zero as a limit, and formula I must be satisfied. Hence the examination of formula I becomes superfluous in this case.

§4. *The square of the semi-convergent series*

$$1 - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \dots \pm \frac{1}{n^r}, \qquad (0 < r \leqq 1). \qquad \text{II}$$

From §2 it follows that each term in any of the powers of this series has the same absolute value as the corresponding term in the same power of the series

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots + \frac{1}{n^r}. \qquad \text{III}$$

The latter series may be written thus:

$$1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{mr}} + \frac{1}{(2^m+1)^r} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^r}\right). \qquad \text{IV}$$

Here $$n = 2^{m+1} - 1. \qquad \text{V}$$

Evidently
$$\left(\frac{1}{2^{rm}} + \frac{1}{(2^m+1)^r} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^r}\right) \begin{matrix} < \dfrac{2^m}{2^{mr}} \\ > \dfrac{2^m}{2^{(m+1)r}} \end{matrix}.$$

Hence the sum in IV is

$$< 1 + 2^{1-r} + 2^{(1-r)2} + \ldots + 2^{(1-r)m}, \text{ or } < \frac{2^{(1-r)(m+1)} - 1}{2^{1-r} - 1}, \qquad \text{VI}$$

and the sum in IV is

$$> 2^{-r} + 2^{1-2r} + 2^{2-3r} + \ldots + 2^{m-(m+1)r}, \text{ or } > \frac{2^{-r}\left[2^{(1-r)(m+1)} - 1\right]}{2^{1-r} - 1}. \qquad \text{VII}$$

For brevity, let the series III be represented by $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. The $2n^{\text{th}}$ term of the square of this series is $(a_{2n-1}a_0 + a_{2n-2}a_1 + \ldots + a_0a_{2n-1}) = 2(a_{2n-1}a_0 + a_{2n-2}a_1 + \ldots + a_na_{n-1}) < 2(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})a_n$. From this and from VI it follows that in the square of series III, the $2n^{\text{th}}$ term, which we designate by b_{2n-1}, is less than

$$\frac{2^{(1-r)(m+1)+1}}{\left[2^{1-r} - 1\right] 2^{(m+1)r}}. \qquad \text{VIII}$$

Fraction VIII approaches the limit zero as n increases indefinitely whenever $r > \frac{1}{2}$. Hence the $2n^{\text{th}}$ term in the square of III approaches zero whenever $r > \frac{1}{2}$. The same conclusion is reached for the $(2n-1)^{\text{th}}$ term. Since series II becomes absolutely convergent by taking $p = 2$, it follows from the above and from §3 that the square of II is convergent and equal to U^2, U being the sum of series II, whenever $r > \frac{1}{2}$.

When $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ it is well known that the square of series II is divergent.*

§5. *The cube of series* II. The $(4n+1)^{\text{th}}$ term of the product of $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ and of $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ has the form $(a_{4n}b_0 + a_{4n-1}b_1 + \ldots + a_0b_{4n})$. This is less than $(b_0 + b_1 + \ldots + b_{2n})a_{2n} + (a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n-1})b_y$, on the supposition that $a_0 + a_1 + \ldots$ stand for series III, that $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ stand for the square of III, and that b_y be the greatest term in the succession of terms $b_{2n+1}, b_{2n+2}, \ldots b_{4n}$.

---

* See Cauchy, Cours d'Analyse, vol. I, p. 149.

Now
$$b_{2n-1} < \frac{2^{(1-r)(m+1)+1}}{[2^{1-r}-1]\,2^{(m+1)r}}$$
and
$$b_{4n} < \frac{2^{(1-r)(m+2)+1}}{[2^{1-r}-1][2^{m+2}-1]^r};$$
hence
$$b_y < \frac{2^{(1-r)(m+2)+1}}{[2^{1-r}-1]\,2^{(m+1)r}}.$$
and
$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n-1})\,b_y < \frac{2^{2(1-r)(m+2)+1}}{[2^{1-r}-1]^2\,2^{(m+1)r}}. \qquad \text{IX}$$

Find values for b_{2n-2}, b_{2n}, analogous to the values for b_{2n-1} and b_{4n}, and we then get the relations
$$\frac{b_{2n-2}}{a_{2n-2}} < \frac{2^{(1-r)(m+1)+1}\,[2^{m+2}-3]^r}{[2^{1-r}-1][2^{m+1}-1]^r},$$
$$\frac{b_{2n-1}}{a_{2n-1}} < \frac{2^{(1-r)(m+1)+1}\,[2^{m+2}-2]^r}{[2^{1-r}-1]\,2^{(m+1)r}},$$
$$\frac{b_{2n}}{a_{2n}} < 2\left\{\frac{2^{(1-r)(m+1)}}{2^{1-r}-1} + \frac{1}{2^{(m+1)r}}\right\}\frac{[2^{m+2}-1]^r}{2^{(m+1)r}}.$$

Of the right-hand members of these three inequalities, the third exceeds each of the two others, and therefore exceeds the right-hand member of a similar inequality formed in connection with any preceding terms of the two series $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ and $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$. In place of this third fraction take another still larger, but somewhat simpler in form, and we have then
$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_{2n}) < (a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n})\,\frac{2^{(1-r)(m+2)+1}\,[2^{m+2}-1]^r}{[2^{1-r}-1]\,2^{(m+1)r}}$$
and
$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_{2n})\,a_{2n} < \frac{2^{2(1-r)(m+2)+1}}{[2^{1-r}-1]^2\,2^{(m+1)r}}. \qquad \text{X}$$

Combining IX and X, we conclude that the $(4n+1)^{\text{th}}$ term of the cube of series II is smaller in absolute value than
$$\frac{2^{2(1-r)(m+2)+2}}{[2^{1-r}-1]^2\,2^{(m+1)r}}. \qquad \text{XI}$$

As m increases indefinitely, fraction XI approaches the limit zero, when $r > \frac{2}{3}$. This same conclusion is reached for a similar fraction known to be greater than the $(4n - x + 1)^{\text{th}}$ term [x being any value 1, 2, 3]. Hence the cube of II converges whenever $r > \frac{2}{3}$, (§3).

To determine the nature of the cube-series when $r < \frac{2}{3}$, observe that the $(2n+1)^{\text{th}}$ term of the square of series III, namely,

$$b_{2n} > (a_0 + a_1 + \dots + a_n)\, a_{2n}, \text{ i. e. } > \frac{2^{-r}\left[2^{(1-r)(m+1)} - 1\right]}{\left[2^{1-r} - 1\right] 2^{(m+2)r}}$$

and

$$b_{4n} > (a_0 + a_1 + \dots + a_n)\, a_{4n}, \text{ i. e. } > \frac{2^{-r}\left[2^{(1-r)(m+1)} - 1\right]}{\left[2^{1-r} - 1\right] 2^{(m+3)r}}.$$

Hence b_s, the smallest term in the succession $b_{2n}, b_{2n+1}, \dots, b_{4n}$, is larger than the last fraction. The $(4n+1)^{\text{th}}$ term of the cube of series III is larger than $(a_0 + a_1 + \dots + a_n)\, b_s$; that is, larger than the fraction

$$\frac{2^{-2r}\left[2^{(1-r)(m+1)} - 1\right]^2}{\left[2^{1-r} - 1\right]^2 2^{(m+3)r}}. \qquad \text{XII}$$

Whenever $r < \frac{2}{3}$, then this fraction does not approach the limit zero, as m increases indefinitely; nor does the $(4n+1)^{\text{th}}$ term of the cube of series II approach zero, for the reason that the constituent terms of which the $(4n+1)^{\text{th}}$ term is composed, are all alike in sign (§2), and the part of it represented by $(a_0 b_{4n} + a_1 b_{4n-1} + \dots + a_{2n} b_{2n})$ is larger in absolute value than fraction XII. Hence the cube-series is divergent whenever $r < \frac{2}{3}$.

§6. *The q-power of series* II. The results obtained in the investigation of the convergence of the square-series and cube-series (see VIII and XI) are in conformity with the following general statement:

If $c_{2^{(q-1)}n}$ designate the $(2^{q-1}n+1)^{\text{th}}$ term in the q-power of series III, then is

$$c_{2^{q-1}n} < \frac{2^{(1-r)(m+q-1)(q-1)+q-1}}{\left[2^{1-r} - 1\right]^{q-1} 2^{(m+1)r}}, \qquad \text{XIII}$$

and the $(2^{q-1}n - x + 1)^{\text{th}}$ term (where x may have any value $1, 2, \dots, 2^{q-1}$) is less than a similar fraction whose limit vanishes under the same condition as does the limit of XIII. We proceed to show that this relation is true for any power whatever, by proving first that if it holds true for some one power q, it holds true for the power $q+1$. If it is true for the power q, then we may proceed as follows:

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_{2^{q-1}n}) < \frac{2^{(1-r)(m+q)}}{2^{1-r} - 1}.$$

If c_y represent the largest term in the succession $c_{2^{q-1}n}, c_{2^{q-1}n+1}, \dots, c_{2^q n}$,

then, if we compare the inequality

$$c_{2^q n} < \frac{2^{(1-r)(m+q)(q-1)+q-1}}{[2^{1-r}-1]^{q-1}\, 2^{(m+1)r}} \qquad \text{XIII(a)}$$

(obtained from XIII by allowing the numerator to increase at a rate not slower than that demanded by relation V, while the denominator was kept constant) with the corresponding one for $c_{2^{q-1}n}$, we find that c_y must be less than the fraction in XIII(a). This is evident when we consider that for any assumed value r within the limits 0 and 1, the numerator never decreases as we pass to higher terms of the series, since m never decreases when n increases. Hence

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{q-1}n})\, c_y < \frac{2^{(1-r)(m+q)q+q-1}}{[2^{1-r}-1]^q\, 2^{(m+1)r}}. \qquad \text{XIV}$$

We have also

$$c_{2^{q-1}n} < a_{2^{q-1}n} \frac{2^{(1-r)(m+q)(q-1)+q-1}\,[2^{m+q} - 2^{q-1} + 1]^r}{[2^{1-r}-1]^{q-1}\, 2^{(m+1)r}}.$$

Since $c_{2^q n}$, $c_{2^{q-1}n}$, and all intervening terms (and therefore all the lower terms) are less than the fraction in XIII(a), it follows that the fraction in our last inequality is larger than the fraction in a similar inequality established in connection with any preceding terms of the two series $a_0 + a_1 + \ldots$ and $c_0 + c_1 + \ldots$ Hence

$$(c_0 + c_1 + \ldots + c_{2^{q-1}n})\, a_{2^{q-1}n} < \frac{2^{(1-r)(m+q)q+q-1}}{[2^{1-r}-1]^q\, 2^{(m+1)r}}. \qquad \text{XV}$$

By adding XIV and XV, we find the $(2^q n + 1)^{\text{th}}$ term of the $(q+1)^{\text{th}}$ power of series III to be less than

$$\frac{2^{(1-r)(m+q)q+q}}{[2^{1-r}-1]^q\, 2^{(m+1)r}}.$$

By comparing this with a similar fraction which is greater than the $(2^{q-1}n+1)^{\text{th}}$ term of the $(q+1)^{\text{th}}$ power, we easily obtain a fraction which is greater than the $(2^q n - x + 1)^{\text{th}}$ term [where x may have any value $1, 2, \ldots, 2^q$], but which approaches the limit zero under the same conditions as does the fraction given above.

Thus it appears that if the relation XIII holds true for some one quantity q, it holds for $q+1$, but it is true for $q=3$ and therefore for any power. The fraction XIII approaches the limit zero, as m increases indefinitely, whenever $r > \frac{q-1}{q}$. Hence the series II can be raised to a power q, subject to the condi-

tion that $\frac{q-1}{q} < r$ (§3). We have thus established the theorem that *the semi-convergent series* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$, $(0 < r \overline{\overline{<}} 1)$, *will remain convergent if raised by Cauchy's multiplication rule to a positive integral power* q, *or to any lower positive integral power, whenever* $\frac{q-1}{q} < r$.

Proceeding to the investigation of the case $r < \frac{q-1}{q}$, we assume that the relation analogous to the inequality XII holds in the case of the qth power, and then show that it holds true for the $(q+1)^{\text{th}}$ power. If it is true for the qth power, then the $(2^{q-1}n+1)^{\text{th}}$ term of the qth power of series III is larger than the quantity analogous to fraction XII, i. e.

$$c_{2^{q-1}n} > \frac{2^{-(q-1)r}\left[2^{(1-r)(m+1)}\right]^{q-1}}{\left[2^{1-r}-1\right]^{q-1}2^{(m+q)r}}. \qquad \text{XVI}$$

We have also

$$c_{2^q n} > \frac{2^{-(q-1)r}\left[2^{(1-r)(m+1)}\right]^{q-1}}{\left[2^{1-r}-1\right]^{q-1}2^{(m+q+1)r}},$$

hence the smallest term c_z in $c_{2^{q-1}n}, c_{2^{q-1}n+1}, \ldots, c_{2^q n}$ is larger than the last fraction. Now the $(2^q n+1)^{\text{th}}$ term of the $(q+1)^{\text{th}}$ power of series III is larger than $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)\, c_z$, that is, larger than

$$\frac{2^{-qr}\left[2^{(1-r)(m+1)}-1\right]^q}{\left[2^{1-r}-1\right]^q 2^{(m+q+1)r}}. \qquad \text{XVII}$$

Hence the inequality XVI holds true for any positive integral power of series III. But the fraction XVI does not approach the limit zero whenever $\frac{q-1}{q} > r$. Hence the $(2^{q-1}n+1)^{\text{th}}$ term of the qth power of series II does not approach the limit zero as n increases indefinitely whenever $\frac{q-1}{q} > r$, and the power-series cannot be convergent. We have thus established the theorem that *the* q^{th} *power of the semi-convergent series* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$, *obtained by Cauchy's multiplication rule, is divergent whenever* $\frac{q-1}{q} > r$.

§7. If we consider the two series $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ (where both r and s are > 0 and $\overline{\overline{<}} 1$), we find by the method of §4 that the $(2n-1)^{\text{th}}$ term

of their product is numerically less than

$$\frac{2^{(1-s)(m+1)}}{[2^{1-s}-1]\,2^{(m+1)r}}+\frac{2^{(1-r)(m+1)}}{[2^{1-r}-1]\,2^{(m+1)s}}. \qquad \text{XVIII}$$

Both these fractions vanish as n increases indefinitely, whenever $r+s>1$. This same conclusion is reached for the $2n^{\text{th}}$ term of the product.

With the view of studying the case $r+s=1$, consider the $(2n-1)^{\text{th}}$ term, viz.

$$\frac{1}{(2n-1)^s}+\frac{1}{2^r(2n-2)^s}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^r n^s}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)^r}.$$

The terms of this series are all alike in sign. The first n terms continually decrease in absolute value from left to right, or else the last n terms continually increase in that direction. Hence the sum, either of the first n terms or of the last n terms, is numerically greater than $\frac{n}{n^{r+s}}$. Since this fraction is equal to unity for any value of n, it follows that the $(2n-1)^{\text{th}}$ term does not approach zero as a limit, and that the product-series diverges. *Thus $r+s>1$ is a necessary and sufficient condition for the applicability of Cauchy's rule to the multiplication, by one another, of the series $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$.*

§8. The disjunctive criterion $r+s>1$ holds true in the more general case of two convergent series in which all the terms after a finite number of terms from the origin have the same absolute values as the corresponding terms in $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ respectively, and can be associated into groups with respect to their signs, so that in either series there is the same number of terms in all the groups, and this number is the same in both series: the order of progression of the signs in all the groups of one factor-series being either the opposite of what it is in all groups of the other factor-series, or the opposite with all signs reversed. For instance, if the terms in the groups of one factor-series have signs $+\,+\,+\,-\,-\,+\,-\,-$, then the terms in the groups of the other factor-series must have either the signs $-\,-\,+\,-\,-\,+\,+\,+$ or the signs $+\,+\,-\,+\,+\,-\,-\,-$. Observe that when the series are convergent there must be in each group as many terms with the sign $+$ as there are terms with

the — sign,* and that the two series, with the terms thus grouped, are absolutely convergent. The product-series arising from two semi-convergent factor-series of this kind will have, at regular finite intervals, terms $\sum a_{n-x} b_x$, composed of constituents $a_{n-x} b_x$ having all (or all excepting a finite number of them) the same sign, and the terms will vanish or not vanish as n increases indefinitely, according as the condition $r + s > 1$ is satisfied or not satisfied. In the latter case the product-series must diverge; in the former case it can be shown to converge by reasoning almost identical to that in the next paragraph.

§9. The condition $r + s > 1$ is *sufficient* to establish the convergence of the product of any two semi-convergent series, one of which becomes absolutely convergent on associating its terms into groups containing each a finite number of terms. In applying the criterion, choose r in II as large as possible, yet so that every term after a finite number of terms from the origin of one of the two given series is numerically equal to or less than the corresponding term in II. Choose s in $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ in the same way with respect to the other given series. Then if $r + s > 1$, the product of the two given series is convergent.

In proving this statement, notice in the first place that the condition $r+s>1$ assures the vanishing of the nth term in the product of $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, and since this n^{th} term is composed of constituents having all like signs, it follows that the nth term of the product of the two given series will vanish also, since its constituents may have unlike signs and are never larger in absolute value (except perhaps in a finite number of cases) than the corresponding constituents in the nth term of the product of $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$. Moreover, the necessary and sufficient conditions I, for the case that the groups in one of the given semi-convergent series contain the same number p of terms, are also satisfied, for, besides the vanishing of the nth and of all succeeding terms, they demand simply that the sum of certain constituents selected from a finite number $p - 1$ of successive terms after the $(n + 1)^{\text{th}}$ term in the product-series, shall vanish as n increases indefinitely.

* See E. Cesaro in Fortschritte der Mathematik, 1888, p. 248.

Nor are we, in the present instance, restricted to the case where the finite number of terms is *the same* in the groups in question: an examination of the mode of deriving the necessary and sufficient conditions* makes it plain that similar conditions hold true for the more general case.† These conditions are satisfied in the present instance.

§10. By reasoning like the above we can show that the condition which was obtained in §6 for the involution of the series II is a *sufficient* condition for the involution of any semi-convergent series which becomes absolutely convergent by associating its terms into groups containing each a finite number of terms. Choose r as large as possible, yet so that all the terms of the series to be tested are not greater in absolute value than the corresponding terms of II, then if $\frac{q-1}{q} < r$, the series can be raised to the positive integral power q by Cauchy's multiplication rule.

Example.—To what positive integral power can the semi-convergent series

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots.$$

be raised by Cauchy's multiplication rule? All the terms of the proposed series after the first term are numerically smaller than the corresponding terms in $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. The latter series is obtained from II by putting $r=1$, and can (§6) be raised to any finite positive integral power, since $r = 1 > \frac{q-1}{q}$ holds true for any value of q. Hence the proposed series can likewise be raised to any positive integral power.

§11. We proceed to extend the results of §9 to the multiplication of the two trigonometric series with real terms,

$$\sin\theta + \frac{1}{2^r}\sin 2\theta + \frac{1}{3^r}\sin 3\theta + \dots + \frac{1}{n^r}\sin n\theta, \qquad \text{XIX}$$

$$\sin\phi + \frac{1}{2^s}\sin 2\phi + \frac{1}{3^s}\sin 3\phi + \dots + \frac{1}{n^s}\sin n\phi, \qquad \text{XX}$$

* Am. Jour. of Math., vol. XV, pp. 339–341. On p. 340, after the second expression for "E," insert the following: "*Similar expressions are gotten for the general case* $pm = 2ps + t$, *where* t *may have any value* $0, 1, 2, \dots, (2p-1)$. *In any case a quantity* β," etc.

† These conditions are deduced in Bull. Am. Math. Soc., 2d series, vol. I, pp. 180–183.

If the angle of one of the series, say the angle θ, is commensurable with π so that $\theta = \frac{a\pi}{b}$, a and b being positive integers, then the series XIX becomes absolutely convergent on having its terms associated into groups containing $2b$ terms each. For observe that the bth and the $2b^{\text{th}}$ term in each group vanish, while the other terms can be arranged in pairs so that in each pair the values of the sines are numerically the same but opposite in sign, while the difference, $\frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+t)^r}$, of the coefficients of the sines in each pair, where $t < 2b$, approaches, as n increases indefinitely, a limit not greater than $\frac{t}{n^{1+r}}$. Hence the sum of all the terms in one group approaches a limit not greater than $\frac{2b^2}{n^{1+r}}$. If $\therefore$ the series XIX, in which $\theta = \frac{a\pi}{b}$, be multiplied by series XX, then the product will be convergent whenever $r + s > 1$. This follows from the argument in §9.

That we may extend the above result to cases when θ is incommensurable with π, observe in the first place that the necessary and sufficient conditions for the product of two semi-convergent series, developed in the Am. Jour. of Math., vol. XV, p. 341, and restated in I, still hold true, if the number p of terms in each group is indefinitely great. Allowing $2b\,(=p)$ to increase indefinitely, but so that $2b < \log n$, the necessary and sufficient conditions for the convergence of the product-series are that each term after the $(n+1)^{\text{th}}$ term in that series approach the limit zero as n increases indefinitely, and that the sum of certain specified constituents selected from $2b - 1$ successive terms (the constituents in formula I) should also approach the limit zero. Now the $(2n-1)^{\text{th}}$ term in the product of $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ is numerically less than XVIII. From the comparison of this expression with a similar one for the $(4n-1)^{\text{th}}$ term, we conclude that the largest term between the $(2n-1)^{\text{th}}$ and the $(4n-1)^{\text{th}}$ terms is numerically less than

$$\frac{2^{(1-s)(m+2)}}{\left[2^{1-s}-1\right] 2^{(m+1)r}} + \frac{2^{(1-r)(m+2)}}{\left[2^{1-r}-1\right] 2^{(m+1)s}}.$$

If this value be multiplied by $2 \log n$, it is found that the product still approaches the limit zero as n increases indefinitely, as long as $r + s > 1$. Hence the sum

of the numerical values of $2(2b-1)$, $<2\log n$, successive terms after the $(2n-1)^{\text{th}}$ term in the product-series approaches the limit zero as n increases indefinitely. But all the constituents of which the terms in the product-series are composed have like signs in each term; hence zero is also the limit of the sum of any constituents selected from $2b-1$ successive terms after the $(2n-1)^{\text{th}}$ term in the product-series. This being the case, the product of XIX and XX converges even when $2b$ is indefinitely large, since XIX continues to be absolutely convergent when its terms are associated into groups of $2b$ terms in each group as long as $2b<\log n$, n increasing indefinitely, and since the terms in XIX and XX are numerically never greater than the corresponding terms in $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ and $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, thus assuring the vanishing, not only of the sum of $2(2b-1)$ terms after the $(2n-1)^{\text{th}}$ term in the product-series, but also the sum of any constituents selected from $2b-1$ of these terms.

The series XIX is *uniformly convergent* except in the neighborhood of $\theta=0$ and $\theta=2a\pi$. Similarly for XX and for those products of XIX and XX which we have proved to be convergent. Let β be a value of θ which is incommensurable with π. Choose a and b, so that $\beta>\frac{a\pi}{b}$ and $\beta<\frac{(a+1)\pi}{b}$. As b increases indefinitely, $\frac{a\pi}{b}$ approaches the limit β. Since the terms of the product of the series XIX and XX, when $\theta=\frac{a\pi}{b}$, are given for an indefinitely large number of values of θ within an interval $(\beta, \beta-\varepsilon)$, for which values β is the limit (said interval being taken as small as we please, though different from zero); since, moreover, the limiting values of those terms are definite and finite, and the product-series is uniformly convergent for the commensurable values of θ in that interval, it follows that the sum of the product-series has a definite finite limiting value for $\theta=\beta-0$, and this limiting value is equal to the sum of the product-series when $\theta=\beta$. Hence the product-series is convergent when $\theta=\beta$,* and we have established that *the product of* XIX *and* XX *is convergent whenever* $r+s>1$.

§12. The results of §11 may be generalized as follows: *If* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *is a series of positive terms such that both* $\sum(a_{2n}-a_{2n+1})$ and $\sum(a_{2n+1}-a_{2n+2})$

* Dini, Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, Leipzig, 1892, §94.

converge absolutely and at least as rapidly as does $\sum \frac{1}{n\lambda n\lambda^2 n \ldots \lambda^{c-1} n (\lambda^c n)^\kappa}$, *where* $\kappa > 3$, *then the product of two convergent series*

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots + a_n \sin n\theta, \qquad \text{XXI}$$

$$b_1 \sin\phi + b_2 \sin 2\phi + \ldots + b_n \sin n\phi \qquad \text{XXII}$$

is convergent, provided that $r + s > 1$, *where* r *and* s *take the maximum values satisfying the relations* $a_n \overset{=}{<} \frac{1}{n^r}$ *and* $b_n \overset{=}{<} \frac{1}{n^s}$, *for all values of* n. By λ_n, $\lambda_n^2 \ldots$ we here denote $\log n$, $\log\log n, \ldots$ We first observe that, on the above assumptions, the series

$$(\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{2b}) + (\pm a_{2b+1} \pm a_{2b+2} \pm \ldots \pm a_{4b}) + \ldots,$$

is absolutely convergent whenever there are in each parenthesis as many positive terms as there are negative terms, and the order of the signs is the same in all parentheses. Suppose we desire to show that

$$\sum (a_{6n} + a_{6n+1} + a_{6n+2} - a_{6n+3} - a_{6n+4} - a_{6n+5})$$

is absolutely convergent. Add the terms in the corresponding parentheses of the following series which are easily seen to be absolutely convergent:

$$\sum (a_{6n} - a_{6n+1} + a_{6n+2} - a_{6n+3} + a_{6n+4} - a_{6n+5}), \ \sum (2a_{6n+3} - 2a_{6n+4}),$$
$$\sum (2a_{6n+2} - 2a_{6n+3}), \ \sum (2a_{6n+1} - 2a_{6n+2}),$$

and the sum, which is the required series, must be absolutely convergent. When the number $2b$ of terms in each parenthesis is indefinitely great, but less than $2\lambda^c n$, then the number of absolutely convergent series with binomial terms, which must be added in the above process, may be indefinitely great, but does not exceed $2\lambda^c n$. Since $\sum \frac{(2\lambda^c n)^2}{n\lambda n\lambda^2 n \ldots \lambda^{c-1} n (\lambda^c n)^\kappa}$ is absolutely convergent, it follows that the sum is still an absolutely convergent series.

If, therefore, we take $\theta = \frac{a\pi}{b}$, we find that XXI becomes absolutely convergent if its terms are associated into groups of $2b$ terms in each. Hence, by

reasoning as in §11, we can establish the convergence of the product of XXI and XXII whenever $r+s>1$.

§13. A theorem corresponding to that in §10 holds for the series XIX and can be proved by the reasoning of §11, and observing that if the fraction in XIII(a) be multiplied by $2\log n$, it will still approach the limit zero, when $\frac{q-1}{q}<r$. Consequently, *the qth power of series* XIX *is convergent whenever* $\frac{q-1}{q}<r$. In the same way we can show that *the qth power of* XXI *is convergent whenever* $\frac{q-1}{q}<r$, *r being the maximum value satisfying the relation* $a_n \overline{\gtrless} \frac{1}{n^r}$, *for all values of n.*

§14. Proceeding to make a few extensions suggested by an article of A. Pringsheim,* we observe in the first place that, as $\sin n\theta=(-1)^n \sin n(\theta+\pi)$, it follows that our results on the multiplication of XIX and XX and of XXI and XXII, as well as our results on the involution of XIX and XXI, continue to hold true if the signs of the coefficients of the terms, instead of being all positive, are alternately plus and minus. In place of the points of non-uniform convergence $\theta=0$ and $\theta=2a\pi$, we have now the points $\theta=\pi$ and $\theta=(2a+1)\pi$.

§15. Our criterion for the applicability of Cauchy's multiplication rule, derived for XXI and XXII, applies also to two convergent series

$$a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+\ldots\ldots+a_n\cos n\theta, \qquad \text{XXIII}$$
$$b_1\cos\phi+b_2\cos 2\phi+\ldots\ldots+b_n\cos n\phi. \qquad \text{XXIV}$$

If we make a few obvious alterations in the statements regarding places of non-uniform convergence and regarding values assumed by the trigonometric functions, then the reasoning of §§11, 12 will apply at once to XXIII and XXIV. In the same way the theorem on the involution of XXI applies to XXIII. Since $\cos n\theta=(-1)^n\cos n(\theta+\pi)$, the coefficients $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ may be alternately plus and minus instead of being all positive.

---

* Math. Annalen, XXVI, pp. 163–166.

§16. In the same way as was suggested in §15, we can show that the criterion for XXI and XXII applies to the product of two convergent series

$$a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots . + a_n \sin n\theta,$$
$$b_1 \cos \phi + b_2 \cos 2\phi + \ldots . + b_n \cos n\phi,$$

no matter whether the coefficients in each series be all plus or whether they be alternately plus and minus.

COLORADO COLLEGE, COLORADO SPRINGS.

Analytic Functions Suitable to Represent Substitutions.

By Leonard E. Dickson.

1. To Hermite* is due the theorem:

In order that the reduced function $\phi(x)$ shall represent a substitution on p letters, p being prime, it is necessary and sufficient that, on raising $\phi(x)$ to the powers $2, 3, \ldots . p-2$, and reducing the results by the congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, the terms independent of x be congruent to zero.

By the *reduced form* of the function $\theta(x)$ is meant the function

$$\phi(x) = \alpha\theta(x+\beta) + \gamma,$$

when α, β, γ are so chosen that the coefficient of the highest power of x in $\phi(x)$ is unity, that of the next highest power zero, and the independent term zero.

2. Theorem: The reduced function $x^k + ax^{k-2} + bx^{k-3} + \ldots . + lx$, where $k > 1$, is not suitable to represent a substitution on p letters, if p be a prime number of the form $nk + 1$.

For on raising it to the power $\frac{p-1}{k} = n$ and reducing by $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, the independent term is 1.

3. The reduced function x is suitable for any prime p; but x^2 is suitable for no odd prime p.

4. Reduced form $x^3 + ax$. $p = 3n + 2$.

$$(x^3 + ax)^{n+1} = x^{3n+3} + (n+1)ax^{3n+1} + \text{lower powers of } x.$$
$$\equiv x^3 + (n+1)a + \text{powers of } x \pmod{3n+2}.$$

$\therefore a \equiv 0$. But the exponent of x in $(x^3)^k$, for $k < 3n+1$, is not divisible by $3n+1$. Thus x^3 is the only suitable reduced form of the third degree.

* Comptes Rendus, vol. 57, p. 750.

5. Reduced form $x^4 + ax^2 + bx$. $p = 4n + 3$.

$$(x^4 + ax^2 + bx)^{n+1} = x^{4n+4} + (n+1)\,ax^{4n+2} + \text{lower powers of } x.$$
$$\therefore\ d \equiv 0 \pmod{4n+3}.$$
$$(x^4 + bx)^{n+2} = x^{4n+8} + (n+2)\,bx^{4n+5} + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2}\,b^2x^{4n+2} + \ldots.$$

(1). If $p > 7$, this is $\equiv x^6 + (n+2)\,bx^3 + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)\,b^2 +$ terms in x (mod. $4n+3$). $\therefore\ b \equiv 0$. But $(x^4)^{2n+1} = x^{8n+4} \equiv 1 \pmod{4n+3}$. Hence, for $p > 7$, no form of the fourth degree can represent a substitution on a prime number of letters.

(2). If $p = 7$, $(x^4 + bx)^3 \equiv (1 + 3b^2) + 3bx^3 + b^3x^3 \pmod{7}$. $\therefore\ 3b^2 + 1 \equiv 0$. $\therefore\ b \equiv \pm 3 \pmod{7}$. Evidently the fourth and fifth powers of $x(x^3 \pm 3)$ contain no term whose exponent is divisible by 6, and hence no constant term when reduced by $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Hence $x^4 \pm 3x$ represents substitutions on 7 letters.

6. Reduced form $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$.

Let $p = 5n + 2$.

$$(x^5 + ax^3 + bx^2 + cx)^{n+1} \text{ requires } (n+1)\,c + \frac{n(n+1)}{1.2}\,a^2 \equiv 0 \pmod{5n+2}.$$
$$\therefore\ 2c + na^2 \equiv 0, \text{ or } c \equiv (2n+1)\,a^2. \quad \therefore\ 5c \equiv a^2 \pmod{5n+2}.$$

The power $(n+2)$ requires that $6abc + b^3 + (n-1)\,a^3b \equiv 0$, when $p > 7$. Applying $2c \equiv -na^2$, this becomes $b\{b^2 - (2n+1)\,a^3\} \equiv 0$. The power $(n+3)$ requires, for $p > 7$,

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)\,n}{1.2.3.4}\Big\{4ac^3 + 6b^2c^2 + \frac{n-1}{5}\,(10a^3c^2 + 30a^2b^2c + 5ab^4)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{5.6}\,(6a^5c + 15a^4b^2) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{5.6.7}\,a^7\Big\} \equiv 0.$$

Multiplying the quantity in brackets by $5^3.6.7$ and reducing by $5c \equiv a^2$, $5(n-1) \equiv -7$, $5(n-2) \equiv -12$, etc., this gives $b^2(6a^4 - 35ab^2) \equiv 0$.

Suppose $b \not\equiv 0$. $\therefore\ 6a^4 - 35ab^2 \equiv 0$. Also $b^2 - (2n+1)\,a^3 \equiv 0$.

$$\therefore\ 6a^4 - 35a^4(2n+1) \equiv 0 \text{ or } -a^4 \equiv 0 \pmod{5n+2}. \quad \therefore\ a \equiv 0 \text{ and } b \equiv 0.$$

Thus the conditions required by the above three powers of our form are satisfied, for $p > 7$, only when $5c \equiv a^2$, $b \equiv 0$, giving the form $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$.

7. The case $p = 7$ is discussed by Hermite.

The square, cube and fourth power give $2c + a^2 \equiv 0$; $b(3 + 6ac + b^2) \equiv 0$; $ab^2 + 4b^2c^2 + 2(2a + c^2)(1 + 2ac + b^2) \equiv 0$. If we take $b \equiv 0$ and apply $c \equiv 3a^2$ to the third congruence, it reduces to the identity $2(a - a^7) \equiv 0 \pmod{7}$. If we take $b \not\equiv 0$ and apply $c \equiv 3a^2$ to the second and third congruences, they reduce to $b^2 - 3a^8 + 3 \equiv 0$; $a + a^4 \equiv 0$. Whence follow two solutions $a \equiv 0$, $b \equiv \pm 2$, and $a^3 \equiv -1$, $b \equiv \pm 1 \pmod{7}$. Thus $p = 7$ leads to the forms $x^5 + ax^3 + 3a^2x$ or $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$, a being indeterminate; $x^5 \pm 2x^3$; $x^5 + ax^3 \pm x^3 + 3a^2x$, a being a quadratic non-residue of 7.

8. Let $p = 5n + 3$, n being even.

$(x^5 + ax^3 + bx^2 + cx)^{n+1}$ gives $b \equiv 0 \pmod{5n + 3}$.

$$(x^5 + ax^3 + cx)^{n+2} \text{ gives } \frac{(n+2)(n+1)}{1.2}c^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}.3a^2c + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}a^4 \equiv 0.$$

$\therefore\ 12c^2 + 12na^2c + n(n-1)a^4 \equiv 0.$

$36c^2 + 36na^2c + 9a^4n^2 \equiv 9a^4n^2 - 3n(n-1)a^4 \equiv a^4n^2 \pmod{5n + 3}$.

$\therefore\ 6c + 3a^2n \equiv \pm a^2n.\quad \therefore\ 3c \equiv -a^2n$ or $-2a^2n$.

Hence $c \equiv (3n + 2)a^2$ or $(n + 1)a^2$.

The odd powers of $x^5 + ax^3 + cx$ give no terms with even exponent, and hence no constant term upon reduction by $x^{5n+2} \equiv 1 \pmod{5n + 3}$.

For $p > 13$, $(x^5 + ax^3 + cx)^{n+4}$ gives

$$c_5^{n+4}.5ac^4 + c_6^{n+4}.20a^3c^3 + c_7^{n+4}.21a^5c^2 + c_8^{n+4}.8a^7c + c_9^{n+4}.a^9 \equiv 0,$$

where c_r^m denotes the binomial coefficient $\dfrac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)}{1.2\ldots.r}$. Dividing out the factor $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ and multiplying by $5^4.7!$, we find:

$$210a(5c)^4 + 140a^3.5(n-1)(5c)^3 + 21a^5.5^2(n-1)(n-2)(5c)^2$$
$$+ 5^3(n-1)(n-2)(n-3)a^7(5c) + \frac{5^4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8.9}a^9 \equiv 0.$$

Since $5(n-1) \equiv -8$, $5(n-2) \equiv -13$, etc., this becomes:

$$210a(5c)^4 - 8.140a^3(5c)^3 + 8.13.21a^5(5c)^2 - 8.13.18a^7(5c) + 2.13.23a^9 \equiv 0.$$

(1). $c \equiv (3n + 2)a^2.\quad \therefore\ 5c \equiv a^2.$

$\therefore\ a^9(210 - 8.140 + 8.13.21 - 8.13.18 + 2.13.23) \equiv 0.$ The coefficient

of a^9 is seen to be zero. The condition is therefore satisfied for $5c \equiv a^2$, a being arbitrary.

(2). $c \equiv a^2(n+1)$. $\therefore$ $5c \equiv 2a^2$.

$\therefore$ $a^9(210.2^4 - 8.140.2^3 + 8.13.21.2^2 - 8.13.18.2 + 2.13.23) \equiv 0$.

$\therefore$ $-10a^9 \equiv 0 \pmod{5n+3}$. $\therefore$ $a \equiv 0$ and $c \equiv 0$.

Thus for $p > 13$ the reduced quintic form must be equivalent to the form $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$.

9. For $p = 13$, $c \equiv -5a^2$ or $3a^2$.

$(x^5 + ax^3 + cx)^6$ gives $10a(1 + c^3)(3c + 2a^2) \equiv 0$. For $c \equiv -5a^2$ this reduces to an identity. For $c \equiv 3a^2$ it becomes $6a^3(1 + a^6) \equiv 0$. $\therefore$ a is either $\equiv 0$ or a quadratic non-residue of 13.

$(x^5 + ax^3 + cx)^8$ gives $(5c^4 + a^2c^3 + 4a^4c^2 + 4a^6c + a^8) + (c^6 + 1)(8c + 2a^2) \equiv 0$.

The first expression reduces to an identity for $c \equiv -5a^2$ or $3a^2$. $c^6 + 1 \equiv 0$ (mod. 13) if $c \equiv -5a^2$; $8c + 2a^2 \equiv 0$ (mod. 13) if $c \equiv 3a^2$. $(x^5 + ax^3 + cx)^{10}$ gives $10a(c^9 + 1) + a(c^3 + 1)(8c^3 - 2a^2c^2 - a^4c + 3a^6) \equiv 0$. For $c \equiv 3a^2$ this becomes $10a(a^{18} + 1) + 3a^7(a^6 + 1) \equiv 3a(a^6 + 1)(a^6 - 1) \equiv 0$ (mod. 13). For $c \equiv -5a^2$ it becomes the identity $10a(1 - 5a^{18}) + 11a^7(1 + 5a^6) \equiv 0$ (mod. 13).

Thus all conditions are satisfied by the forms: $x^5 + ax^3 + 3a^2x$, where a is a quadratic non-residue of 13, and $x^5 + ax^3 - 5a^2x$, where a is arbitrary. The last form is equivalent to $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$.

10. Let $p = 5n + 4$.

$(x^5 + ax^3 + bx^2 + cx)^{n+1}$ gives $a \equiv 0$. $(x^5 + bx^2 + cx)^{n+2}$ gives $bc \equiv 0$. $(x^5 + bx^2 + cx)^{n+3}$ gives $4c^3 + nb^4 \equiv 0$. Hence $b \equiv 0$, $c \equiv 0$, and x^5 is the only suitable function.

11. We have seen that every function of the fifth degree suitable to represent a substitution must be reducible to the form $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$ when $p > 13$. Inversely, for $p = 5n + 2$ or $5n + 3$, the function $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$ is always suitable to represent a substitution on a prime number p of letters, i. e. will run through a complete system of residues modulo p simultaneously with x.

For, if not, we must have for two values of x, incongruent modulo p, say x and y, the following congruence:

$5x^5 + 5ax^3 + a^2x \equiv 5y^5 + 5ay^3 + a^2y \pmod{p}$.

$\therefore$ $(x - y)\{5(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 5a(x^2 + xy + y^2) + a^2\} \equiv 0$.

$\therefore$ $5\{x^4 + y^4 + (xy + a)(x^2 + xy + y^2)\} + a^2 \equiv 0$.

Put $x = u + v,\ y = u - v$.

$$\therefore\ 5\{2u^4 + 12u^2v^2 + 2v^4 + (u^2 - v^2 + a)(3u^2 + v^2)\} + a^2 \equiv 0.$$

or $$5\{5u^4 + 10u^2v^2 + v^4 + 3au^2 + av^2\} + a^2 \equiv 0.$$

Put $u^2 = \alpha,\ v^2 = \beta$.

$$\therefore\ 25\alpha^2 + 50\alpha\beta + 5\beta^2 + 15a\alpha + 5a\beta + a^2 \equiv 0.$$

Transform (to center of conic) by writing $\alpha \equiv X - \frac{a}{20},\ \ \beta \equiv Y - \frac{a}{4}$, or by the integral expressions:

$$20X \equiv 20\alpha + a,\ \ 4Y \equiv 4\beta + a \pmod{p}.$$

The constant term is seen to vanish, giving

$$25X^2 + 50XY + 5Y^2 \equiv 0,$$

or $$(5X + 5Y)^2 \equiv 20Y^2 = 5(2Y)^2 \pmod{p}.$$

Hence 5 must be a quadratic residue of p. But, by Gauss, D. A., Art. 121, $+5$ is a quadratic residue of *no* odd prime number of the form $5n + 2$ or $5n + 3$.

12. Of the forms $\phi(x) = 5x^5 + 5ax^3 + a^2x$, given by the values $1, 2, \ldots (p-1)$ of a, to find those independent ones to which all the others can be *reduced.* Suppose the form given by a' can be reduced to that given by a. Then $5x^5 + 5a'x^3 + a'^2x$ must be identical with $\alpha\phi(\beta x) = 5\alpha\beta^5x^5 + 5\alpha\beta^3ax^3 + \alpha\beta a^2x$, where α and β must thus satisfy the conditions $\alpha\beta^5 \equiv 1,\ \alpha\beta^3a \equiv a',\ \alpha\beta a^2 \equiv a'^2 \pmod{p}$. These three conditions reduce to two independent ones: $\alpha\beta^5 \equiv 1$, $a \equiv a'\beta^2 \pmod{p}$. Hence the necessary and sufficient condition that the forms corresponding to a and a' shall be reducible one to the other is that a and a' be both quadratic residues or both non-residues of p. Hence there are just two such independent forms.

13. Of interest is the case $a' = p - a$. Then $\beta^2 \equiv -1 \pmod{p}$. The reduction can thus be effected if p be of the form $4n + 1$.

Let $x = \beta X$. Then

$$5x^5 + 5a'x^3 + a'^2x \equiv 5x^5 - 5ax^3 + a^2x \equiv \beta X(5X^4 + 5aX^2 + a^2) \pmod{p}.$$

$$\therefore\ \beta(5X^5 + 5aX^3 + a^2X) \equiv 5(\beta X)^5 + 5a'(\beta X)^3 + a'^2(\beta X).$$

Hence if the substitution corresponding to the form given by a is $\begin{pmatrix} c, & d, & e, & \ldots & h \\ C, & D, & E, & \ldots & H \end{pmatrix}$, that corresponding to the form given by a' will be $\begin{pmatrix} \beta c, & \beta d, & \beta e, & \ldots & \beta h \\ \beta C, & \beta D, & \beta E, & \ldots & \beta H \end{pmatrix}$.

Example: $p = 17$. $\therefore \beta \equiv 4$. Table for $x^5 + ax^3 + 7a^2x$:

$$\begin{cases} a = 8, & (4, 13)(5, 7, 9, 12, 10, 8)(1, 15, 11, 14, 16, 2, 6, 3). \\ a' = 9, & (16, 1)(3, 11, 2, 14, 6, 15)(4, 9, 10, 5, 13, 8, 7, 12). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7, & (1, 11, 10, 15, 8, 13, 12, 14)(2, 9, 4, 5, 3, 16, 6, 7). \\ a' = 10, & (4, 10, 6, 9, 15, 1, 14, 5)(8, 2, 16, 3, 12, 13, 7, 11). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5, & (7, 10)(1, 11, 5)(6, 12, 16)(2, 14, 15, 3), 4, 8, 9, 13 \text{ being unchanged.} \\ a' = 12, & (11, 6)(4, 10, 3)(7, 14, 13)(8, 5, 9, 12), 16, 15, 2, 1 \text{ being unchanged.} \end{cases}$$

14. For $p = 13$, the forms (additional to the forms $5x^5 + 5ax^3 + a^2x$ existing also in the general case) $x^5 + ax^3 + 3a^2x$, where a is a non-residue of 13, all *reduce* to a single one.

For $p = 7$, the additional forms $x^5 \pm 2x^2$ and $x^5 + ax^3 \pm x + 3a^2x$, a being a non-residue of 7, reduce to $x^5 + 2x^2$ and $x^5 + 3x^3 + x^2 - x$ respectively.

15. Reduced form $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$. $p = 6n + 5$. The power $n + 1$ gives $a \equiv 0$. $(x^6 + bx^3 + cx^2 + dx)^{n+2}$ gives $c^2 + 2bd \equiv 0$. The power $n + 3$ gives, for $p > 11$,

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}\left\{3cd^2 + \frac{n}{4}(4b^3d + 6b^2c^2)\right\} \equiv 0.$$

The power $(n + 4)$ gives, for $p > 17$,

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3.4}\left\{d^4 + \frac{n}{5}(30b^2cd^2 + 20bc^3d + c^5) + \frac{n(n-1)}{5.6}(6b^5d + 15b^4c^2)\right\} \equiv 0.$$

$$\therefore \begin{cases} (1)\ c^2 + 2bd \equiv 0, \\ (2)\ 6cd^2 + 2nb^3d + 3nb^2c^2 \equiv 0, \\ (3)\ 10d^4 + 60nb^2cd^2 + 40nbc^3d + 2nc^5 + n(n-1)(2b^5d + 5b^4c^2) \equiv 0. \end{cases}$$

Substituting $c^2 \equiv -2bd$ in (2) and (3), they become

$$6cd^2 - 4nb^3d \equiv 0.$$

$$10d^4 - 12nb^2cd^2 - 8n(n-1)b^5d \equiv 0. \tag{4}$$

From the last two,

$$10d^4 - 8n(2n-1)b^5d \equiv 0. \tag{5}$$

Multiplying (1) by nb^2 and subtracting from (2),

$$6cd^2 + 2nb^2c^2 \equiv 0.$$

Suppose $c \not\equiv 0$. $\therefore 3d^2 + nb^2c \equiv 0$.

Hence, substituting in (4),

$$46d^4 - 8n(n-1)b^5d \equiv 0.$$

Combining with (5),

$$d^4\{46(2n-1) - 10(n-1)\} \equiv 0.$$

$$\therefore\ 313d^4 \equiv 0 \pmod{6n+5}.\quad \therefore\ d \equiv 0.$$

Hence c must be $\equiv 0$. $\therefore\ bd \equiv 0$. $\therefore$ by (5), $d \equiv 0$. But $(x^6 + bx^3)^{3n+2}$ gives x^{18n+12} and no other term with exponent divisible by $6n+4$. Hence no function of the sixth degree can represent a substitution on a prime number of letters > 17.

16. $p = 11$.

As before, $$a \equiv 0\,;\ c^3 + 2bd \equiv 0. \tag{1}$$

The fourth and fifth powers now give:

$$4c + 4b^3d + 6b^2c^3 + 12d^3c \equiv 0, \tag{2}$$

$$1 + 10d^3 + 30b^3c + 5d^4 + 30b^2cd^3 + 20bc^3d + c^5 \equiv 0. \tag{3}$$

Multiplying (1) by $2b^3$ and subtracting from (2),

$$c(1 + b^3c + 3d^3) \equiv 0.$$

(1). Suppose $c \equiv 0$. (3) becomes $1 + 10d^3 + 5d^4 \equiv 0 \pmod{11}$.

$\therefore\ (d^4 + 2d^3 - 2) \equiv 0$, or $(d^3 - 4)(d^3 - 5) \equiv 0$. $\therefore\ d \equiv \pm 2$ or ± 4.

Now $bd \equiv 0$. Hence, since $d \not\equiv 0$, $b \equiv 0$.

Evidently $x(x^5 + d)$, when raised to the power 6, 7, 8 or 9, will contain no exponent divisible by 10. Hence the forms $x^6 \pm 2x$ and $x^6 \pm 4x$ satisfy all conditions.

(2). Suppose $c \not\equiv 0$. $\therefore\ 3d^3 + b^3c + 1 \equiv 0$.

Reducing (3) by $c^3 \equiv -2bd$, it becomes

$$1 + 10d^3 + 5d^4 - 3b^3c + 5b^2cd^3 \equiv 0. \tag{4}$$

Applying $b^3c \equiv -1 - 3d^3$, (4) gives $d^4 + 3d^3 + 4 \equiv 0$.

$$\therefore\ (d^3 - 3)(d^3 - 5) \equiv 0 \pmod{11}.\quad \therefore\ d \equiv \pm 4 \text{ or } \pm 5.$$

For $\quad d \equiv \pm 5,\ b^3c \equiv 1,\ c^3 \equiv \pm\ b.\quad \therefore\ c^5 \equiv +1.$

For $\quad d \equiv \pm 4,\ b^3c \equiv 6,\ c^3 \equiv \pm 3b.\quad \therefore\ c^5 \equiv -1.$

Hence the forms satisfying conditions (1), (2), (3) are:

$$\begin{cases} x^6 \pm\ c_1^2x^3 + c_1x^2 \pm 5x, \text{ where } c_1 \text{ is a quadratic residue of } 11. \\ x^6 \pm 4c_2^2x^3 + c_2x^2 \pm 4x, \text{ where } c_2 \text{ is a quadratic non-residue of } 11. \end{cases}$$

We can verify that the conditions obtained by raising $(x^6 + bx^3 + cx^2 + dx)$ to the powers 6, 7, 8 and 9 are satisfied. The 6th power gives

$$b^2 + 6b^3d^2 + 12bc^2d + c^4 + 2b^4c + b^2d^4 + 4bc^2d^3 + c^4d^2 \equiv 0.$$

Applying $c^2 \equiv -2bd$, this becomes

$$b^2 - 3b^3d^2 + 2b^4c - 3b^2d^4 \equiv 0.$$

Applying $b^2c \equiv -1 - 3d^2$ to the latter,

$$b^2(1 - 2d^2 + 3d^4) \equiv 0,$$

equivalent to $d^4 + 3d^2 + 4 \equiv 0$.

The 7th power gives

$$30bcd + 5c^3 + 5b^4 + 60bcd^3 + 30c^3d^2 + 15b^4d^2 + 60b^3c^2d$$
$$+ 15b^2c^4 + b^6c + 6bcd^5 + 5c^3d^4 \equiv 0.$$

Applying $c^2 \equiv -2bd$, this reduces to $5b^4 - 2bcd - b^4d^2 + b^6c - 4bcd^5 \equiv 0$. Reducing by $3d^2 \equiv -1 - b^2c$, this gives $b^5d - 2b^2c - 3 \equiv 0$, a form derived from (4) by substituting $d^4 \equiv -3d^2 - 4$ and afterwards $d^2 \equiv -4 - 4b^2c$. Hence the condition is not independent of (1), (2), (3). Similarly for the 8th and 9th powers.

17. $p = 17$.

As in the general case,

$$a \equiv 0;\ c^2 + 2bd \equiv 0, \tag{1}$$
$$3cd^2 + 2b^3d + 3b^2c^2 \equiv 0. \tag{2}$$

But the third condition now contains a term in c, thus:

$$6c + 15d^4 + 180b^2cd^2 + 120bc^3d + 6c^5 + 6b^5d + 15b^4c^3 \equiv 0. \tag{3}$$
$$\therefore\ 3cd^2 - 4b^3d \equiv 0;\ 2c + 5d^4 - 12b^2cd^2 - 8b^5d \equiv 0.$$

From the last two,
$$2c + 5d^4 - b^2cd^2 \equiv 0. \tag{4}$$

As in the general case, if $c \not\equiv 0$, $3d^2 + 2b^2c \equiv 0$ or $d^2 \equiv 5b^2c$.

Substituting in (4), $2c + b^4c^2 \equiv 0$. $\therefore\ c \equiv b^5d$. Thus $3cd^2 \equiv 4b^3d$ gives $3b^2d^2 \equiv 4$. $\therefore\ c^4 \equiv -6$ (mod. 17), which is impossible, since it requires $c^{16} \equiv 4$ (mod. 17). Hence $c \equiv 0$ and, as in the general case, the form is rejected.

18. The five pairs of forms $\phi(x) = x^6 \pm c^3x^3 + cx^2 \pm 5x$, where c is a quadratic residue of 11, all reduce to a single form. For the conditions that $\alpha\phi(\beta x) = \alpha\beta^6x^6 \pm \alpha\beta^3c^3x^3 + \alpha\beta^2cx^2 \pm 5\alpha\beta x$ shall be identical with $x^6 \pm c'^3x^3 + c'x^2 \pm 5x$ are

$$\alpha\beta^6 \equiv 1,\ \alpha\beta^3c^3 \equiv \pm c'^3,\ \alpha\beta^2c \equiv c',\ \alpha\beta \equiv \pm 1,$$

which are equivalent to the three:

$$\alpha\beta \equiv \pm 1, \quad \beta^5 \equiv \pm 1, \quad \beta c \equiv \pm c'.$$

Likewise the five pairs of forms $x^6 \pm 4c^2x^3 + cx^2 \pm 4x$, where c is a quadratic non-residue of 11, all reduce to a single form.

19. *Summary.*—Let $\phi(x)$ be an integral function of degree $\overline{\overline{<}}\, 6$ having integral coefficients. Then if $\begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$ represents a substitution on a prime number p of letters, the substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ cx+d \end{pmatrix}$$

may be reduced by properly choosing a, b, c, d and by using if possible $x^p = x \pmod{p}$ to one of the following forms:

Reduced function:	Suitable for:
x	$p =$ any,
x^3	$p = 3n + 2$,
$x^4 + 3x$	$p = 7$,
$5x^5 + 5ax^3 + a^2x$, ($a = 1$ or some one non-residue of p),	
$x^5 + 2x^3$	$p = 7$,
$x^5 + 3x^3 + x^2 - x$	
$x^5 + 2x^3 - x$	$p = 13$,
x^5	$p = 5n + 4$,
$x^6 + 2x$	$p = 11$.
$x^6 + 4x$	
$x^6 + x^3 + x^2 + 5x$	
$x^6 + 5x^3 + 2x^2 + 4x$	

UNIVERSITY OF CHICAGO, *March* 27, 1895.

NOTE OF MARCH, 1896.—Generalizations of these results will appear in a dissertation to be published soon at the University Press.

Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen.

VON S. KANTOR.

"Boldness is caution in these circumstances."

Da im Raume von r Dimensionen ($r > 2$) das Theorem, dass sich alle Transformationen der von den birationalen Transformationen gebildeten Gruppe aus einer einzigen Art solcher Transformationen (den quadratischen) zusammensetzen lassen, nicht mehr besteht, so habe ich vor dem Eintreten in das directe allgemeine Problem es für nützlich gehalten, den umgekehrten Weg einzuschlagen, nämlich alle diejenigen Transformationen, welche die Zusammensetzung aus quadratischen gestatten, von den übrigen abzusondern, und hier treten jene in erste Linie, welche aus $(SC)^2$ durch Zusammensetzung entstehen. Sie enthalten nur mit einer Beschränkung die Theorie der birationalen Transformationen im R_2, sie liefern nur eine unendliche Untergruppe von ihnen, indem jene nur jene Transformationen des R_2 zu verwenden sind, wo sich Parre gleicher Singularitäten zusammenstellen lassen, deren Gesammtsumme den Werth $n-1$ hat. Hieran werden sich die aus $(SGH)^2$ allein und die aus $(SC)^2$ und $(SGH)^2$ zusammengesetzten Transformationen schliessen.

Die Frage nach den Periodicitäten jener Transformationen lässt sich, wenigstens ganz strenge für die Characteristiken, auch für den R_r bis zu einem allgemeinen und durchgreifenden Aequivalenztheoreme führen, wie in den ersten 9 Paragrafen dieser Arbeit gezeigt werden soll.

§1.—*Allgemeine Eigenschaften der Fundamentalsysteme.*

Es soll nur für den Augenblick und der leichteren Sprechweise wegen die Einschränkung gemacht werden, dass bei der Zusammensetzung der zwei Transformationen $(SC, S'C')^2$, $(TD, T'D')^2$ niemals ein Punkt T mit einer C incident sei. Dann besitzt die am Ende entstehende Transformation nur Fundamental-

punkte und Fundamentalmannigfaltigkeiten von $r-2$ Dimensionen. Ich werde die ersteren durchgehends mit S, die letzteren mit C bezeichnen. Es sei ferner s die Ordnung der einem Punkte S entsprechenden Mannigfaltigkeit U_{r-1} und c die Ordnung der einer C entsprechenden Mannigfaltigkeit V_{r-1}. *Jede solche Transformation hat den Grad n in den M_{r-1} gleich dem Grade in den M_1.*

Die quadratische Transformation Q^2 hat einen invarianten Singularitätencomplex $m=2$, $y=0$, $z=1$, wo y die Vielfachheit in S, z jene in C ist. Denkt man sich daher eine M^2_{r-1} durch alle C der in Zusammensetzung tretenden Q^2 hindurchgehend,* so muss dieselbe invariant sein, oder anders gesagt, es muss die Gesammttransformation einen invarianten Singularitätencomplex besitzen, der für alle Punkte S die Vielfachheit $y=0$, und für alle C die Vielfachheit $z=1$ hat. Daher muss

$$2n-\Sigma c=2 \quad \text{oder} \quad \Sigma c=2(n-1) \tag{1}$$

sein. Q^2 besitzt ferner den invarianten Complex $m=3$, $y=1$, $z=1$ und eine M^3_{r-1}, welche durch alle S einfach, durch alle C einfach gehen würde, liefert daher

$$3n-\Sigma s-\Sigma c=3 \quad \text{oder} \quad \Sigma s=n-1. \tag{2}$$

Endlich besitzt die Q^2 den invarianten Complex $m=4$, $y=2$, $z=1$, woraus folgt $4_{n-2}\Sigma s-\Sigma c=4$, was sich auch aus (1) und (2) ergibt.†

2. Ein Büschel von R_{r-1} und das Büschel ihm entsprechender M^2_{2-1} liefern eine Ω^{n+1}_{r-1}, welche durch die sämmtlichen S und C ebenso oft wie die M^2_{r-1} hindurchgeht und welche durch die Transformation einer Ω^{n+1}_{r-1} derselben Durchgänge im zweiten Systeme entspricht. Denn jene Ω^{n+1}_{r-1} ist der Ort der Punkte p, deren Geraden pp' in einem R_{r-1} jenes Büschels enthalten sind und die zweite Ω^{n+1}_{r-1} ist der Ort der zugehörigen Punkte p'. Daraus folgt, wenn mit σ, γ die Vielfachheiten der M^n_{r-1} in den Punkten S und den Mannigfaltigkeiten C bezeichnet werden,

$$(n+1)n-\Sigma\sigma s-\Sigma\gamma c=n+1. \tag{3}$$

---

*Ueber die bei Verwendung dieses Kunstgriffes nothwendige Vorsicht cf. Note I zu meinem Buche: "Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene." Berlin, Mayer & Müller, 1895.

†Dasselbe Verfahren kann man in der Ebene für die Herleitung der arithmetischen Relationen verwenden, welche bei einer aus Q^2 zusammensetzbaren, also bei jeder, birationalen Transformation gelten.

Da man durch Specialisirung auf $r = 2$ die Formeln für die Ebene finden muss, so kann man aussprechen:

Theorem I.—Jeder Punkt S hat eine entsprechende Fundamental —U_{r-1}, deren Ordnung s gleich seiner Vielfachheit σ für die homaloidalen M^n_{r-1} ist, und jede C hat eine entsprechende Fundamental —V_{r-1}, deren Ordnung c das Doppelte seiner Vielfachheit γ für die M^n_{r-1} ist. Also $\sigma = s$, $c = 2\gamma$ und aus (3)

$$n^2 - \Sigma\sigma^2 - 2\Sigma\gamma^2 = 1. \tag{4}$$

Die M^n_{r-1} müssen $p = 0$, $p^{(1)} = \ldots . p = 0$ haben, es müssen also die M^{n-r-1}_{r-1} durch die $S^{\sigma-r+1}$ und $C^{\gamma-1}$ gerade die Dimension $u = 0$ liefern, was sich auch mittelst der auf R_r verallgemeinerten Nöther'schen Formel aus Ann. di Mat. ser. 2. t. V ergeben müsste. Leider ist für eine solche Verallgemeinerung noch nichts geschehen.

(4) mit den in neuer Gestalt geschriebenen Formeln (1) und (2) liefern nun:

Theorem II.—Für die Ordnungen der Abfalls — M_{r-1} bestehen die Relationen:

$$\Sigma\sigma = n - 1, \ \Sigma\gamma = n - 1, \ \Sigma\sigma^2 + 2\Sigma\gamma^2 = n^2 - 1.$$

3. Da keine Abfalls —U_{r-1} oder V_{r-1} eine Ordnung $> n$ haben kann, so folgt sofort, dass die sämmtlichen Zahlen $\gamma \leqq \frac{n}{2}$ sein müssen.

Die unendlich nahen Punkte eines Punktes S sind eindeutig auf die entsprechende Fundamental — U'_{r-1} abgebildet. Hiebei entsprechen aber wegen der mit dem Begriffe der Transformation verknüpften Stetigkeit den Punkten einer U_{r-1} in der Nähe am S die Punkte jener U'_{r-1} in der Nähe des der U_{r-1} entsprechenden Punktes S'. Also folgt: *Geht die einem Punkte S entsprechende Fundamental — U'_{r-1} durch S' mit der Vielfachheit ρ_{ik}, so geht die dem S' entsprechende Fundamental — U_{r-1} durch S mit derselben Vielfachheit ρ_{ik}.*

Man kann sich nicht desselben Schlusses für die Durchgänge der U'_{r-1} durch die C' oder der V'_{r-1} durch die S' bedienen. Allein aus den Resultaten für die Ebene erhält man durch die Zusammenfassung je zweier Fundamentalpunkte zu einem C:

Theorem III.—Geht die einem Punkte S entsprechende Fundamental — U'_{r-1} durch C' mit der Vielfachheit σ_{ik}, so geht die der C' entsprechende V_{r-1} durch S mit der Vielfachheit $2\sigma_{ik}$.

Geht die einer C entsprechende Fundamental — V'_{r-1} durch S' mit einer Vielfachheit τ_{ik}, so geht die der S' entsprechende U_{r-1} durch C mit der Vielfachheit $\tau_{ik} : 2$.

Geht die einer C entsprechende Fundamental — V'_{r-1} durch C' mit einer Vielfachheit v_{ik}, so geht die der C' entsprechende U_{r-1} durch C mit der Vielfachheit v_{ik}.

Daraus folgt dann auch, dass die Vielfachheiten τ_{ik}, mit welchen die V_{r-1} durch die Punkte S hindurchgehen, in beiden Systemen gerade Zahlen sein müssen.

4. Nun beweist man ganz allgemein, dass in einer birationalen Transformation des R_r die Fundamental — U_{r-1}, welche einem Fundamentalpunkte entspricht, in der Jacobischen Mannigfaltigkeit des homaloidalen, r-fach unendlichen Systemes $(r-1)$ mal zu zählen ist, so dass $(r-1)\Sigma s + \Sigma c = (r-1)(n-1) + 2(n-1) = (r+1)$, welche Zahl wirklich die Ordnung der Jacobischen Mannigfaltigkeit im R_r ist.

5. Ebenso beweist man allgemein, dass die Jacobische Mannigfaltigkeit* in einem σ-fachen Punkte der M^n_{r-1} einen $(r+1)\sigma-(r-1)$ fachen Punkt und in einer γ-fachen M_{r-2} eine Vielfachheit $(r+1)\gamma-1$ besitzt. Wegen des in 4. benützten Umstandes folgen also die beiden Relationen:

$$(r-1)\sum_k \rho_{ik} + \sum_k \tau_{ik} = (r+1)\sigma_i - (r-1), \tag{6}$$

$$(r-1)\sum_k \sigma_{ik} + \sum_k v_{ik} = (r+1)\gamma_i - 1. \tag{7}$$

6. Diejenigen Singularitätencomplexe, welche zu den U_{r-1} gehören, stimmen genau mit den Singularitäten der bezüglichen Fundamentalcurven in der Ebene überein, während die Singularitätencomplexe der V_{r-1} erhalten werden, indem man je zwei Singularitätencomplexe von Fundamentalcurven gleicher Ordnung in der Ebene addirt. Damit berechtigt sich der Schluss, dass für jede einzelne U_{r-1} mit Bezug auf ihre Singularitäten in den S und den C gilt:

$$\sum_i \rho_{ik} + \sum_i \sigma_{ik} = 3\sigma_k - 1 \tag{8}$$

und für jede einzelne V_{r-1} mit Bezug auf ihre Singularitäten in den S und den C:

$$\sum_i \tau_{ik} + 2\sum_i v_{ik} = 3\gamma_k = 2. \tag{9}$$

---

* Man kann sich hierzu irgend einer der bisher nur für die Ebene angewandten Methoden bedienen.

7. Die fundamentalen linearen Substitutionen, welche die durch diese Transformationen bewirkte Verwandlung der Singularitätencomplexe ausdrücken, sind

$$\left.\begin{aligned} m' &= nm - \Sigma y \,.\, \sigma_k - 2\Sigma y \,.\, \gamma_k\,, \\ y'_i &= sm - \Sigma y \,.\, \rho_{ik} - 2\Sigma z \,.\, \sigma_{ik}\,, \\ z'_k &= cm - \Sigma y \,.\, \tau_{ik} - 2\Sigma z \,.\, \upsilon_{ik}\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und dieselben lassen ungeändert die beiden Formen

$$m^2 - \Sigma y^2 - 2\Sigma z^2, \tag{11}$$

$$3m - \Sigma y - 2\Sigma z. \tag{12}$$

Hier sind mit m, y, z Ordnung, Vielfachheit in S und C für eine willkürliche Varietät bezeichnet, mit m', y', z' das entsprechende in R'.

Man beweist dies eben damit, dass die quadratische Elementartransformation diese Formen, genommen mit nur einer Variabeln y und einer Variabeln z ungeändert lassen. Die Zusammensetzung mehrerer Q^2 drückt sich dann für (10) in einer Vermehrung der Variabeln y und z aus, und da jede einzelne je eine Form wie die in (11) ungeändert lässt, so kann man für jede einzelne die Formen in mehreren Variabeln schreiben, indem dann die überschüssigen Variabeln gemäss $y'_i = y_i$, $z'_k = z_k$ überhaupt ungeändert gelassen werden.

Aus den Formeln (11) folgen dann die quadratischen Relationen für die Coefficienten der Substitutionen (10), welche man für die Ebene ausführlich kennt. Ich schreibe sie nicht auf, hebe aber besonders hervor, dass sie hier im R_r constatirt sind, ohne auf den geometrischen Ursprung gegründet zu sein, wie in der Ebene, nämlich nicht auf die Formeln für das Geschlecht p und die Dimension u angewendet auf das homaloidale System.

8. Auch die Relation (4) könnte aus der Zusammensetzung mittelst der Q^2 hergeleitet werden, da sie für die einzelne Q^2 gewiss gilt.

9. *Theorem IV.—In beiden Systemen besteht dieselbe Anzahl Punkte S und dieselbe Anzahl Mannigfaltigkeiten C. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Bestehens der Substitutionen* (10) *und ihrer Zusammensetzbarkeit aus den elementaren Q^2.*

Die Punkte S theilen sich in Gruppen gleicher Vielfachheit und ebenso die C für sich. Wie in der Ebene sind auch im R_r die Zahlen α_i, welche den Umfang dieser Gruppen angeben, in beiden Systemen dieselben, die Vielfachheiten i können aber in den zwei Systemen verschiedene sein.

Wie in der Ebene ist auch im R_r eine Beziehung zwischen conjugirten Gruppen der beiden Systeme vorhanden, welche dadurch definirt wird, dass die zu allen S oder C einer Gruppe gehörigen Fundamental $-U_{r-1}$ oder V_{r-1} durch alle S' oder C' gleich vielfach hindurchgehen, mit Ausnahme der S oder C der conjugirten Gruppe und dieses so, dass es in der conjugirten Gruppe stets nur einen S oder C gibt, der sich von den anderen unterscheidet und wie in der Ebene gilt, dass dieser Unterschied für die C gleich ± 1 ist. Dagegen ist er für die Durchgänge durch die S gleich ± 2. Präcis ist noch festzusetzen:

Die Gruppen gleich vielfacher S sind stets conjugirt Gruppen gleich vielfacher S' und jene von C denen von C'.

Um den Satz zu beweisen, muss man auch für die Ebene sich auf eine genauere Art über die Entstehung der conjugirten Gruppen bei der Zusammensetzung der Transformationen mittelst Q^2 klar werden, indem die Hauptpunkte der hinzutretenden Q^2 auf die Gruppen der bestehenden Transformation vertheilt.

10. Einem Punkte einer Fundamentalmannigfaltigkeit C entspricht eine Fundamentalcurve, welche die Ordnung γ besitzt, wenn γ die Vielfachheit von C für die M_{r-1}^n ist und welche durch die S' so oft geht, als deren U_{r-1} durch C geht und die C' so oft trifft als die Vielfachheit von deren U_{r-1} in C ist.

Für die einzelnen Fundamentalcurven gilt in Uebereinstimmung mit der Ebene

$$\Sigma\tau + \Sigma v = 3\gamma - 1, \tag{12}$$

wo τ, v die Durchgangszahlen für eine und dieselbe Fundamentalcurve sind.

11. *Theorem V.—Die hier behandelten Transformationen haben in Bezug auf die Mannigfaltigkeiten M_i aller Dimensionen i dieselbe Ordnung oder mit anderen Worten: Sie haben alle $r-1$ Ordnungen unter einander gleich.*

Wie ich in meiner Note Rend. Ist. Lomb.* erwähnt habe, sind die fundamentalen linearen Substitutionen für alle M_i von $i-1$ bis $r-2$ dieselben für die elementaren Q^2. Durch irgend welche Zusammensetzung mit Q^2 ändern sich daher die Ordnungen aller M_i, $i=1$ bis $r-2$, in gleicher Weise, und da die Ordnung für $i=1$ gleich jener für $r-1$ (nämlich gleich 2), so werden für alle M_i die Ordnungen stets gleich bleiben. Die linearen Substitutionen für die

* 31. Mai 1894.

Verwandlung der $M_i (i = 2, \ldots, r-1)$ sind immer gleich (10), jene für die Verwandlung der M_1 haben die σ unteren Coefficienten 1. Colonne gleich.

12. Während sich die Relationen für die Vielfachheiten der C mit Leichtigkeit herleiten lassen, ist es viel schwieriger, etwas Allgemeines über die Ordnungen der C zu sagen. Es ist aber wenigstens ersichtlich, dass die Summe der Ordnungen aller C stets dieselbe bleibt, wenn man die Ordnungen der durch die aussergewöhnlichen Begegnungen von C entstehenden Fundamental D_{r-2} 2. Species mitzählt.* Nun ist die Summe der Ordnungen im allgemeinsten Falle $2^{r+1} - 2$, also $2(n-1)$.

13. *Theorem VI.—Wenn eine gegenwärtiger Transformationen eine M^2_{r-1} in sich transformirt, derart dass die M^2_{r-1} keinen Punkt S enthält, so sind die in der M^2_{r-1} enthaltenen Punktsysteme gleichzeitig collinear.* Denn der Schnitt mit irgend einem R_{r-1} wird in den Restschnitt mit einer M^n_{r-1} verwandelt, welche bereits die sämmtlichen C' enthält, deren Gesammtordnung $2(n-1)$ ist, u. zw. nach Formel (1), da in diesem Falle sämmtliche C' quadratisch sein müssen.

Oder man beweist es auch durch die Zusammensetzung aus Q^2. Man kann aus lauter solchen Q^2 zusammensetzen, welche ebenfalls M^2_{r-1} in sich transformiren und da jede einzelne eine Collineation hervorruft, so bringt auch die Endtransformation eine Collineation hervor.

13. Gleichzeitig mit 13. schliessen wir nun auch: Jedes Fundamentalsystem gegenwärtiger Art lässt sich im R_r zu einer Transformation verwenden, welche eine M^2_{r-1} in sich überführt, derart, dass dieselbe durch sämmtliche C und C' hindurchgeht. Hiebei sind nothwendig sämmtliche C, sowie sämmtliche C' vom zweiten Grade, also M^2_{r-2}.

15. Es gibt jedoch noch einen anderen Fall, wo sämmtliche C und C' quadratische Gebilde sind. Das ist derjenige, wo sämmtliche C durch ein und dieselbe M^2_{r-3} hindurchgehen. Aber wenn zwei M^2_{r-2}, welche eine C in einer und derselben M^2_{r-2} schneiden, durch Q^2 (SC) transformirt werden, so liefern sie nur dann zwei M'^2_{r-2}, welche C' in einer und derselben M'^2_{r-3} treffen, wenn sie in

* Hiebei ist unter Fundamental D_{r-2} 1-Species eine solche verstanden, deren Punkten Fundamentalcurven oder Fundamental — M_Λ entsprechen, deren Gesammtheit nicht eine U_{r-1}, sondern eine U'_{r-1} durchlaufen.

M^2_{r-3} die Kegel S^2C berühren. Indem dies auf alle componirenden Q^2 angewendet wird, findet sich:

Theorem VII.—Wenn sämmtliche C (sowie andererseits die C') M^2_{r-2} sein sollen, ohne in einer M^2_{r-1} enthalten zu sein, so müssen dieselben durch dieselbe M^2_{r-3} gehen und in ihr einen gemeinsamen Berührungskegel M^2_{r-1} besitzen.

Als einen Specialfall hievon kann man den betrachten, wo sämmtliche C in zwei R_{r-2} zerfallen und alle diese R_{r-2} durch einen gemeinsamen R_{r-3} hindurch gehen.

16. Ein ganz bemerkenswerther Fall von 15. ist dann der, wo die beiden M^2_{r-3} der zwei Systeme coincidiren und ausserdem auch die beiden Berührungskegel übereinstimmen.

17. Indem nun zu dem Probleme der periodischen Transformationen übergegangen wird, sind die Characteristiken* zu bilden, mit welchen sich allein die gegenwärtige Abhandlung beschäftigen wird. Unter "Characteristik" wird die Angabe der Coincidenzen oder Verkettungen der C' oder S' mit den C oder S verstanden. Hier ist zunächst wie schon bei den Q^2 hervorzuheben, dass eine Verkettung von Punkten S mit den C arithmetisch eingeführt werden und in einzelnen Fällen auch Periodicität liefern kann, dass aber, wenn man, wie es das geometrische Abbild der Characteristik verlangt, die behufs Ueberganges der S' in die C und der C' in die S nöthigen Incidenzen von S'_i mit den C auch in der Ausführung der Tableaux mit berücksichtiget, sofort Wiedersprüche eintreten,

---

*Ich will auf diese Behauptung, welche ich in den Rendiconti Ist. Lombardo 31. Mai 1894 gemacht habe, mit einigen Worten eingehen. Wollte man die Characteristik S'_i in C, C' in S voraussetzen, so erhielte man

$(S'C')^2$, $(S'^2C'^2CS)^4$, $(C^2S^2S'^2C')^5$, $(S'C'C^2S^2)^4$, $(SC)^2$ und für S' in C, C' in C_1' in S käme $(S'C')^2$ $(CC_1'\ S'^2C'^2)^4$ $(C^2C_1'^2S'^2C'^2S)^6$ $(C^2C_1'^2S'^2C'^2S^2)^7$ $(C^2C_1'^2S'^2C'^2S^3)^8$ $(C^3C_1'^3S'^4C'^3S^3)^9$ $(C^4C_1'^3S'^3C'^3S^2)^9$ $(C^5C_1'^3S'C'^3S)^7$ $(CC_1'^2S'C'S^2)^5$ . . . . und für S' in S_1' in C_1C' in C_1' in $S(S'C')^2$, $(S'^2C'^2S_1'^2C_1'^2)^4$ $(S'^4C'^4S_1'^2C_1'^2S^2C^2)^8(S'^4C'^4S_1'^4C'^4S^2C^2)^{10}(S'^6C'^6S_1'^4C_1'^4S^4C^4)^{14}(S'^6C'^6S_1'^6C_1'^6S^4C^4)^{16}(S'^8C'^8S_1'^6C_1'^6S^6C^6)^{20}$ $(S'^8C'^8S_1'^8C_1'^8S^6C_6)^{22}$, ... andererseits für S' in G, G' in S, H' in H, $(S'G'H')^2(S'^2G'GHH')^3$ $(G^2SG'H'S'H)^3(G'SHG)^2$ . . . . weil Incidenzen wie $(S'H)(SH')$ unumgänzlich sind.

Aber keine dieser arithmetisch unanfechtbaren linearen Substitutionen entspricht einer auch nur denkbaren Characteristik. Denn wenn C' in S sich verwandeln soll, so muss es mindestens durch S hindurchgehen, damit doch zunächst seine Ordnung auf eins erniedrigt werde; dann gehen aber die M^2_{r-1} bereits (in uneigentlicher Weise, wenn man will) alle durch S und transformiren sich also nicht mehr in M^4_{r-1}, sondern in M^3_{r-1}, wodurch das Tableau bereits geändert wird. Führt man es aber mit dieser Beachtung weiter, so gelangt man zu Widersprüchen, wie es in der letzten Characteristik hier vorher dargethan ist.

welche die principielle Undurchführbarkeit solcher Characteristiken darthun. Es bleiben also nur jene Characteristiken zu untersuchen, wo S' mit S, C' mit C verkettet sind. Da auch stets die S' zu den S, C' den C conjugirt sind, hat man also auch hier von einer Directrixsubstitution der Characteristik zu sprechen, welche aber hier stets intransitiv ist. Man erhält sie, indem man auf jeden Punkt S seinen conjugirten S' und auf diesen seinen Transformirten oder den conjugirten S' des mit jenem coincidenten S folgen lässt und ebenso für die C' und C.

§2.—*Die Fundamentalsysteme für die ersten* 17 *Ordnungen.*

Dieselben werden abgeleitet durch thatsächliche successive Zusammensetzung von $(SC)^2$-Transformationen. S_{ik} ist ein i-facher Punkt und k bezeichnet die Stellung in seiner Gruppe gleicher Vielfachheit, ebenso für die C, und gewöhnlich sind S_{ik}, S'_{ik} conjugirte Punkte.

Ordnung 2: $\begin{matrix} SC \\ S'C' \end{matrix}$; Ordnung 3: $\begin{matrix} S_2\, C_{1,1}\, C_{1,2} \\ S'_2\, C'_{1,1}\, C'_{1,2} \end{matrix}$; Ordnung 4: $\begin{matrix} S_2\, S_1\, C_2\, C_1 \\ S'_2\, S'_1\, C'_2\, C'_1 \end{matrix}$,

$\begin{matrix} S_3\, C_{1,1}\, C_{1,2}\, C_{1,3} \\ S'_3\, C'_{1,1}\, C'_{1,2}\, C'_{1,3} \end{matrix}$; Ordnung 5: $\begin{matrix} S_{2,1}\, S_{2,2}\, C_{2,1}\, C_{2,2} \\ S'_{2,1}\, S'_{2,2}\, C'_{2,1}\, C'_{2,2} \end{matrix}$;*

6: $\begin{matrix} S_{2,1}\, S_{2,2}\, S_1\, C_2\, C_3 \\ S'_{2,1}\, S'_{2,2}\, S'_1\, C'_2\, C'_3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_4\, S\, C_{2,1}\, C_{2,2}\, C_1 \\ S'_3\, S'_2\, C'_{1,1}\, C'_{1,2}\, C'_3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_5\, C_{1,1}\, C_{1,2}\, C_{1,3}\, C_{1,4}\, C_{1,5} \\ S'_5\, C'_{1,1}\, C'_{1,2}\, C'_{1,3}\, C'_{1,4}\, C'_{1,5} \end{matrix}$;

7: $\begin{matrix} S_{2,1}\, S_{2,2}\, S_{2,3}\, C_{3,1}\, C_{3,2} \\ S'_{2,1}\, S'_{2,2}\, S'_{2,3}\, C'_{3,1}\, C'_{3,2} \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_4\, S_2\, S_3\, C_2\, C_1 \\ S'_4\, S'_2\, S'_3\, C'_2\, C'_1 \end{matrix}$;†

8: $\begin{matrix} S_4\, S_2\, S\, C_4\, C_2\, C_1 \\ S'_4\, S'_2\, S'\, C'_4\, C'_2\, C'_1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_4\, S_3\, C_4\, C_{1,1}\, C_{1,2}\, C_{1,3} \\ S'_3\, S'\, C'_1\, C'_{2,1}\, C'_{2,2}\, C'_{2,3} \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_{2,1}\, S_{2,2}\, S_{2,3}\, S_1\, C_4\, C_3 \\ S'_{2,1}\, S'_{2,2}\, S'_{2,3}\, S'_1\, C'_4\, C'_3 \end{matrix}$;

$\begin{matrix} S_5\, S_2\, C_3\, C_{2,1}\, C_{2,2} \\ S'_4\, S'_3\, C'\, C'_{3,1}\, C'_{3,2} \end{matrix}$; 9: $\begin{matrix} S_{4,1}\, S_{4,2}\, C_4\, C_{2,1}\, C_{2,2} \\ S'_{4,1}\, S'_{4,2}\, C'_4\, C'_{2,1}\, C'_{2,2} \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_6\, S_2\, C_{3,1}\, C_{3,2}\, C_{1,1}\, C_{1,2} \\ S'_6\, S'_2\, C'_{3,1}\, C'_{3,2}\, C'_{1,1}\, C'_{1,2} \end{matrix}$;

10: $\begin{matrix} S_{4,1}\, S_{4,2}\, S\, C_5\, C_{2,1}\, C_{2,2} \\ S'_{4,1}\, S'_{4,2}\, S'\, C'_5\, C'_{2,1}\, C'_{2,2} \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_4\, S_3\, S_2\, C_5\, C_3\, C_1 \\ S'_6\, S'_2\, S'\, C'_4\, C'_3\, C'_2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_6\, S_3\, C_4\, C_3\, C_{1,1}\, C_{1,2} \\ S'_7\, S'_2\, C'\, C'_2\, C'_{3,1}\, C'_{3,2} \end{matrix}$;

$\begin{matrix} S_5\, S_{2,1}\, S_{2,2}\, C_5\, C_{2,1}\, C_{2,2} \\ S'_1\, S'_{4,1}\, S'_{4,2}\, C'\, C'_{4,1}\, C'_{4,2} \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_5\, S_4\, C_4\, C_3\, C_2 \\ S'_4\, S'_5\, C'_2\, C'_3\, C'_4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} S_3\, S_1\, C_{2,1}\, C_{2,2}\, C_{2,3}\, C_{2,4}\, C \\ S'_4\, S'_5\, C'_{1,1}\, C'_{1,2}\, C'_{1,3}\, C'_{1,4}\, C'_5 \end{matrix}$;

---

* Dies ist die erste Ordnung, wo aus einem ebenen Fundamentalsystem kein Fundamentalsystem des R_r abgeleitet werden kann, nämlich aus $(c^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 a_1 a_2 a_3)^5$ der Ebene.

† Von der Ordnung 7 an schreibe ich die Fundamentalsysteme des §3 nicht mehr an und ebenso nicht mehr von der Ordnung 9 an jene des §4.

$$11: \begin{matrix} S_6 S_4 C_5 C_{2,1} C_{2,2} C_1 \\ S'_6 S'_4 C'_5 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_6 S_{2,1} S_{2,2} C_5 C_2 C_3 \\ S'_2 S'_{4,1} S'_{4,2} C'_4 C'_5 C' \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_4 S_6 C_{4,1} C_{4,2} C_{1,1} C_{1,2} \\ S'_3 S'_2 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{3,1} C'_{3,2} \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_4 S_6 C_4 C_{3,1} C_{3,2} \\ S'_6 S'_4 C'_4 C'_{3,1} C'_{4,2} \end{matrix}; \quad 12: \begin{matrix} S_8 S_2 S C_{4,1} C_{4,2} C_2 C \\ S'_3 S'_2 S'_6 C'_{1,1} C'_{1,2} C'_3 C'_6 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_6 S_4 S C_6 C_{2,1} C_{2,2} C \\ S' S'_4 S'_6 C'_6 C'_{2,1} C'_{2,2} C' \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_6 S_2 S_2 S C_6 C_3 C_2 \\ S' S'_4 S'_4 S'_2 C' C'_4 C'_6 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_7 S_4 C_5 C_3 C_2 C_1 \\ S'_4 S'_7 C'_5 C'_3 C'_2 C'_1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_5 S_4 S_2 C_6 C_3 C_2 \\ S' S'_4 S'_6 C'_2 C'_4 C'_5 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_7 S_{2,1} S_{2,2} C_5 C_{3,1} C_{3,2} \\ S'_3 S'_{4,1} S'_{4,2} C' C'_{5,1} C'_{5,2} \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_5 S_3 S_2 C_6 C_3 C_{1,1} C_{1,2} \\ S' S'_2 S'_3 C'_2 C' C'_{4,1} C'_{4,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_3 C_{4,1} C_{4,2} C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} \\ S'_2 S'_9 C'_{1,1} C'_{1,2} C'_{3,1} C'_{3,2} C'_{3,3} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_6 S_5 C_6 C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} C_{1,4} C_{1,5} \\ S' S'_{10} C' C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_{2,4} C'_{2,5} \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_8 S_3 C_4 C_{3,1} C_{3,2} C \\ S'_3 S'_8 C'_4 C'_{3,1} C'_{3,2} C' \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_5 S_6 C_{4,1} C_{4,2} C_3 \\ S'_8 S'_5 C'_{4,1} C'_{4,2} C'_3 \end{matrix}; \quad 13: \begin{matrix} S_6 S_4 S_2 C_6 C_4 C_2 \\ S'_6 S'_4 S'_2 C'_6 C'_4 C'_2 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{6,1} S_{6,2} C_{2,1} C_{2,2} C_{2,3} C_6 \\ S'_{6,1} S'_{6,2} C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_6 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_3 S_4 C_5 C_{3,1} C_{3,2} C_1 \\ S'_4 S'_3 C' C'_{3,1} C'_{3,2} C'_5 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_3 S_4 C_5 C_4 C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} \\ S'_2 S'_{10} C' C'_2 C'_{3,1} C'_{3,2} C'_{3,3} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{6,1} S_{6,2} C_{4,1} C_{4,2} C_{4,3} \\ S'_{6,1} S'_{6,2} C'_{4,1} C'_{4,2} C'_{4,3} \end{matrix};$$

$$14: \begin{matrix} S_7 S_4 S_2 C_7 C_3 C_2 C \\ S' S'_4 S'_3 C' C'_2 C'_4 C'_6 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S S_{4,1} S_{4,2} S_{4,3} C_{6,1} C_{6,2} C_1 \\ S'_7 S'_{2,1} S'_{2,2} S'_{2,3} C'_{3,1} C'_{3,2} C'_7 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_2 S_4 S_6 S C_7 C_4 C_2 \\ S'_2 S'_4 S'_6 S' C'_7 C'_4 C'_2 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_4 S_3 S_6 C_7 C_4 C_{1,1} C_{1,2} \\ S'_{10} S'_2 S' C'_2 C'_3 C'_{4,1} C'_{4,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{6,1} S_{6,2} S C_{2,1} C_{2,2} C_{2,3} C_7 \\ S'_{6,1} S'_{6,2} S' C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_7 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_7 S_6 C_7 C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} C_{1,4} C_{1,5} C_{1,6} \\ S'_{12} S' C'_1 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_{2,4} C'_{2,5} C'_{2,6} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_{2,1} S_{2,2} S_1 C_6 C_4 C_3 \\ S'_2 S'_{4,1} S'_{4,2} S'_3 C' C'_5 C'_7 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_5 S_6 C_3 C_{3,1} C_{2,2} \\ S'_6 S'_7 C' C'_2 C'_{5,1} C'_{5,2} \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_8 S_4 S C_5 C_{4,1} C_{4,2} \\ S'_3 S'_4 S'_6 C'_7 C'_{3,1} C'_{3,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_9 S_4 C_5 C_4 C_{2,1} C_{2,2} \\ S'_6 S'_7 C' C'_6 C'_{3,1} C'_{3,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_5 S_{4,1} S_{4,2} C_7 C_4 C_2 \\ S_{10} S'_{6,1} S'_{6,2} C'_3 C'_4 C'_6 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_7 S_6 C_6 C_{3,1} C_{3,2} C_1 \\ S'_4 S'_9 C'_4 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_5 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_6 S_5 S_2 C_6 C_5 C_2 \\ S'_6 S'_5 S'_2 C'_6 C_5 C'_2 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_3 S_2 C_{5,1} C_{5,2} C_3 \\ S'_8 S'_3 S'_2 C'_{5,1} C'_{5,2} C'_3 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_{10} S_3 C_{4,1} C_{4,2} C_3 C_{2,1} C_{2,2} \\ S'_7 S'_{10} C'_{1,1} C'_{1,2} C'_3 C'_{4,1} C'_{4,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{11} S_2 C_{3,1} C_{3,2} C_{3,3} C_{2,1} C_{2,2} \\ S'_5 S'_8 C'_{1,1} C'_{1,2} C'_{1,3} C'_{5,1} C'_{5,2} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_9 S_4 C_{4,1} C_{4,2} C_{4,3} C \\ S'_3 S'_{10} C'_{3,1} C'_{3,2} C'_{3,3} C'_4 \end{matrix};$$

$$15: \begin{matrix} S_8 S_4 S_2 C_7 C_4 C_2 C \\ S'_8 S'_4 S'_2 C'_7 C'_4 C'_2 C' \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_6 C_7 C_{2,1} C_{2,2} C_{2,3} C_1 \\ S'_8 S'_6 C'_7 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_{2,1} S_{2,2} S_{2,3} C_7 C_4 C_3 \\ S'_2 S'_{4,1} S'_{4,2} S'_{4,3} C'_7 C'_6 C' \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_6 S_{4,1} S_{4,2} C_7 C_5 C_2 \\ S'_2 S'_{6,1} S'_{6,2} C'_7 C'_3 C'_4 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{10} S_4 C_5 C_4 C_3 C_2 \\ S'_6 S'_8 C' C'_3 C'_4 C'_6 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{10} S_{2,1} S_{2,2} C_{5,1} C_{5,2} C_{2,1} C_{2,2} \\ S'_3 S'_{6,1} S'_{6,2} C'_{1,1} C'_{1,2} C'_{6,1} C'_{6,2} \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_8 S_4 S_2 C_6 C_5 C_3 \\ S'_8 S'_4 S'_2 C'_6 C'_5 C'_3 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_{12} S_2 C_{3,1} C_{3,2} C_{3,3} C_{3,4} C_{1,1} C_{1,2} \\ S'_4 S'_{10} C'_{1,1} C'_{1,2} C'_{1,3} C'_{1,4} C'_{5,1} C'_{5,2} \end{matrix}; \quad 16: \begin{matrix} S_8 S_4 S_2 S C_3 C_4 C_2 C_1 \\ S'_8 S'_4 S'_2 S C'_3 C'_4 C'_2 C'_1 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} S_8 S_4 S_3 C_8 C_4 C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} \\ S' S'_2 S'_{12} C'_1 C'_2 C'_{4,1} C'_{4,2} C'_{4,3} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} S_8 S_6 S_1 C_8 C_{2,1} C_{2,2} C_{2,3} C_1 \\ S'_8 S'_6 S'_1 C'_8 C'_{2,1} C'_{2,2} C'_{2,3} C'_1 \end{matrix};$$

$$S_8S_7\,C_8C_{1,1}C_{1,2}C_{1,3}C_{1,4}C_{1,5}C_{1,6}C_{1,7}\,;\quad S_8S_{2,1}S_{2,2}S_{2,3}S_1\,C_8C_4\,C_3\,;$$
$$S'_1S'_{14}\,C'_1C'_{1,1}C'_{1,2}C'_{1,3}C'_{1,4}C_{1,5}C_{1,6}C'_{1,7}\,;\quad S'_1S'_{4,1}S'_{4,2}S'_{4,3}S'_2\,C'_1C'_6C'_8\,;$$

$$S_5S_2S_8C_8C_3C_{2,1}C_{2,2}\,;\quad S_{10}S_4S_1C_6C_{4,1}C_{4,2}C_1\,;\quad S_6\,S_9C_{3,1}C_{3,2}C_{1,1}C_{1,2}C_7\,;$$
$$S'_6S'_8S'_1C'_1C'_2C'_{6,1}C'_{6,2}\,;\quad S'_2\,S'_5S'_8C'_3C'_{2,1}C'_{2,2}C'_8\,;\quad S'_{11}S'_4C'_{2,1}C'_{2,2}C'_{5,1}C'_{5,2}C'_1\,;$$

$$S_6S_7\,S_2C_8\,C_{3,1}C_{3,2}C_1\,;\quad S_9S_{2,1}S_{2,2}\,S_{2,3}C_7C_{4,1}C_{4,2}\,;\quad S_6S_{4,1}S_{4,2}S_1C_8C_5C_2\,;$$
$$S'_1S'_4S'_{10}C'_5C'_{2,1}C'_{2,2}C'_6\,;\quad S'_3S'_{4,1}S'_{4,2}S'_{4,3}C'\,C'_{7,1}C'_{7,2}\,;\quad S'_1S'_{6,1}S'_{6,2}S'_2C'_3C'_4C'_8\,;$$

$$S_4S_5S_6C_3C_4C_6\,;\quad S_{10}\,S_5C_6C_4C_3C_2\,;\quad S_6S_5S_{2,1}S_{2,2}C_8C_5C_2\,;\quad S_{10}S_4S_1C_6C_{4,1}C_{4,2}C_1\,;$$
$$S'_8S'_6S'_1C'_6C'_5C_4\,;\quad S'_7\,S'_8C'_1C'_2C'_5C'_6\,;\quad S'_1S'_2S'_{6,1}S'_{6,2}C'_2C'_6C'_7\,;\quad S'_3\,S'_4S'_8C_1C_{3,1}C_{3,2}C_8\,;$$

$$S_{10}S_3S_2C_6C_5C_8C_1\,;\quad S_8S_4S_3C_7C_5C_3\,;\quad S_8S_7C_7C_{3,1}C_{3,2}C_2\,;\quad S_{11}S_4C_{5,1}C_{5,2}C_{2,1}C_{2,2}C_1\,;$$
$$S'_6\,S'_3S'_2C'_6C'_5C'_3C'\,;\quad S'_2S'_4S'_3C'_4C'_5C'_6\,;\quad S'_6S'_9C'_5C'_{2,1}C'_{2,2}C'_6\,;\quad S'_6\,S'_9C'_{1,1}C'_{1,2}C'_{3,1}C'_{3,2}C'_7\,;$$

$$S_7S_6S_2C_7C_5C_3\,;\quad S_{10}S_4S_1C_{6,1}C_{6,2}C_2C_1\,;\quad S_{11}S_4\,C_5C_{4,1}C_{4,2}C_{1,1}C_{1,2}\,;$$
$$S'_4S'_5S_6C'_2C'_5C'_7\,;\quad S'_2S'_5S'_4C'_{2,1}C'_{2,2}C'_3C'_8\,;\quad S'_3\,S'_{12}C'\,C'_{3,1}C'_{3,2}C'_{4,1}C'_{4,2}\,;$$

$$S_6\,S_9C_6\,C_{4,1}C_{4,2}C_1\,;\quad S_{6,1}S_{6,2}S_3C_7C_6C_{1,1}C_{1,2}\,;\quad S_8S_5S_2C_{6,1}C_{6,2}C_3\,;$$
$$S'_{11}S'_4C'_4C'_{3,1}C'_{3,2}C'_5\,;\quad S'_{2,1}S'_{2,2}S'_1C'_2C'_3C'_{5,1}C'_{5,2}\,;\quad S'_6S'_5S'_2C'_{6,1}C'_{6,2}C'_3\,;$$

$$S_6S_5S_4C_7C_6C_3\,;\quad S_8\,S_6S\,C_6C_5C_4\,;\quad S_{12}S_3\,C_{4,1}C_{4,2}C_{4,3}C_{1,1}C_{1,2}C_{1,3}\,;$$
$$S'_2S'_6S'_7C'_3C'_5C'_7\,;\quad S'_4S'_5S'_6C'_3C'_5C'_7\,;\quad S'_3\,S'_{12}C'_{1,1}C'_{1,2}C'_{1,3}C'_{4,1}C'_{4,2}C'_{4,3}\,;$$

$$S_{10}S_5\,C_6C_5C_{1,1}C_{1,2}C_{1,3}C_{1,4}\,;\quad S_{11}S_{2,1}S_{2,2}C_{5,1}C_{5,2}C_3C_2\,;$$
$$S'_2\,S'_{12}C'\,C'_2C'_{3,1}C'_{3,2}C'_{3,3}C'_{3,4}\,;\quad S'_3\,S'_{6,1}S'_{6,2}C'_{1,1}C'_{1,2}C'_6C'_7\,;$$

17 : $$S_8S_{4,1}S_{4,2}C_8C_{4,1}C_{4,2}\,;\quad S_{10}S_4S_2C_7C_5C_3C\,;\quad S_{12}S_4\,C_{5,1}C_{5,2}C_3C_2C\,;$$
$$S'_3S'_{4,1}S'_{4,2}C'_8C'_{4,1}C'_{4,2}\,;\quad S'_{10}S'_4S'_2C'_7C'_5C'_3C'\,;\quad S'_6\,S'_{10}C'_{1,1}C'_{1,2}C'_3C'_4C'_7\,;$$

$$S_{6,1}S_{6,2}S_{2,1}S_{2,2}C_3C_6C_2\,;\quad S_{12}S_{2,1}S_{2,2}C_{5,1}C_{5,2}C_{3,1}C_{3,2}\,;$$
$$S'_{6,1}S'_{6,2}S'_{2,1}S'_{2,2}C'_3C'_6C'_2\,;\quad S'_4\,S'_{6,1}S'_{6,2}C'_{1,1}C'_{1,2}C'_{7,1}C'_{7,2}\,;$$

$$S_{10}S_6\,C_{6,1}C_{6,2}C_{1,1}C_{1,2}C_{1,3}C_{1,4}\,;\quad S_{10}\,S_6C_{5,1}C_{5,2}C_{5,3}C_1\,;$$
$$S'_2\,S'_{14}C'_{2,1}C'_{2,2}C'_{3,1}C'_{3,2}C'_{3,3}C'_{3,4}\,;\quad S'_6\,S'_{10}C'_{3,1}C'_{3,2}C'_{3,3}C'_7\,;$$

$$S_{10}S_6\,C_7C_4C_8C_{1,1}C_{1,2}\,;\quad S_{12}S_4\,C_{4,1}C_{4,2}C_{4,3}C_{4,4}\,;$$
$$S'_4S'_{12}C'_1C'_2C'_3C'_{5,1}C'_{5,2}\,;\quad S'_4S'_{12}C'_{4,1}C'_{4,2}C'_{4,3}C'_{4,4}\,.$$

§3.—*Die periodischen Characteristiken des Fundamentalsystemes* $(S_{n-1}\,C_{1,1}\,C_{1,2}\,\ldots\,C_{1,n-1})^n$.

Theorem VIII.—Die Characteristik S' *in* S, $(C_{1,i}\,C'_{1,i})$ $[i=1,\ldots n-1]$ *ist aperiodisch, sobald* $n>4$.

Man kann die successiven Transformationen aufstellen, kann aber auch den Beweis auf Theorem XII und V des IV. Th. §7 der Preisschrift basiren oder

man kann auch die characteristische Determinante der linearen Substitution rechnen. Hieraus folgt dann, da die successiven Ordnungen und Vielfachheiten sich nicht ändern, sofort auch

Theorem IX.—Die Characteristik S' in $S, (C_{1,1} C'_{1,i_1}) \ldots . (C_{1,n-1} C'_{1,i_{n-1}})$ ist aperiodisch, sobald $n > 4$.

Die Characteristiken S' in S'_1 in $\ldots . S$ für $n = 3, 4$ werden bei den cubischen und biquadratischen Transformationen behandelt werden. Es bleiben die Characteristiken (SS'), $C'_{1,i}$ in $\ldots .$ $(C'_{1,i})^{h_i} = C_{i,k}$ übrig, wo $i = 1, \ldots . n-1$; $k = 1, \ldots . n-1$, die h_i willkürlich sind.

Theorem X.—Die Characteristiken (SS'), $C'_{1,i}$ in $\ldots . C_{i,k}$ sind periodisch für jede Permutation der i, k und alle möglichen Werthe von h_i und der Index ist das Doppelte des kleinsten Multiplums aller $h_i + 1$.

Die successiven Characteristiken sind sämmtlich von der Art S'^{n-1}, S^{n-1} und entwickeln sich derart, dass wenn $h_1 < h_2 < \ldots . < h_{n-1}$, nach $h_1 + 1$ Anwendungen die erste C_1 in das Fundamentalsystem eintritt, also die erste Reduction der Ordnung um zwei stattfindet. Nach T^{h_2+1} tritt $C_{1,2}$ ein und erst nach T^N tritt ein Fundamentalsystem ein, welches sämmtliche $C'_{1,i}$, $C_{1,i}$ und ihre Einschaltlinge enthält und somit gibt T^{2N} Collineation.

Die interne involutorische Characteristik T^N hat also $(SS')(C_{1,i} C'_{1,i})$. Die characteristische Determinante ist $(x-1)\Pi(x^{h_i+1}+1)$.

Theorem XI.—Die Characteristiken (SS'), $C'_{1,i}$ in $\ldots . (C'_{1,i})^{h_i} = C_{1,k}$ sind transponirbar in (SS'), $C'_{1,i}$ in $\ldots .$ $(C'_{1,i})^{h_i} = C_{1,i}$.

Solange eine Verkettung zweier nicht conjugirter C, C' vorhanden ist, kann man diese Verkettung verringern, indem man eine $S^2 C'_{1,i} (C'_{1,i})^1$ der Ordnung 3 anwendet, welche jede andere Kette, in welcher $C_{1,i}$ vorkommt, um ein Glied verlängert, bis die ganze Kette aufgelöst ist.

Der Index der Characteristik ist also, wenn die Ordnungen der Cyclen in der Directrixsubstitution mit $l_1, \ldots . l_\lambda$ bezeichnet werden, $2N$, wo N das kleinste Vielfache von $l_1, \ldots . l_\lambda$. Also folgt:

Theorem XII.—Alle periodischen Characteristiken (SS') sind durch $(SC)^2$ äquivalent mit Characteristiken (SS'), $C'_{1,i}$ in $\ldots .$ $C_{1,i}$ $(i = 1, \ldots . n-1)$.

Anmerkung. Fundamentalsysteme mit einem einzigen C gibt es nicht ausser $(SC)^2$. Denn es müsste C_{n-1} enthalten, also die bezügliche ebene Transformation müsste zwei $(n-1)$-fache Fundamentalpunkte besitzen.

§4.—*Die periodischen Characteristiken der Fundamentalsysteme mit zwei C.*

Wenn nur zwei C vorhanden sind, so ist zu beachten, dass kein C eine Vielfachheit $> \frac{n}{2}$ haben kann, weil sonst die entsprechende V die Ordnung $> n$ haben würde, was nicht sein kann, also müssen für ungerade n die Vielfachheiten $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ und für gerade n müssen sie $\frac{n}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ sein. Die Ebene, welche im 2. Falle den $C_{\frac{n}{2}}$ enthält (schematisch gedacht) ist also fundamental und daher muss ihr ein Fundamentalpunkt S_1 entsprechen. Das Fundamentalsystem ist für die beiden R_r symmetrisch und ferner kann kein zweiter Punkt S_1 vorhanden sein. Die V aber, welche den Fundamentalpunkten S_i, $i > 2$, entsprechen, müssten durch mehr als zwei C hindurchgehen, es können daher die anderen Fundamentalpunkte nur doppelte sein.

Im 1. Falle gibt es keinen einfachen Fundamentalpunkt und aus demselben Grunde nur doppelte Fundamentalpunkte.* Also:

Theorem XIII.—Die Fundamentalsysteme mit zwei C sind für

$$\left.\begin{array}{ll} n \text{ gerade} & C_{\frac{n}{2}} \quad C_{\frac{n-2}{2}} S S_{2,1} S_{2,2} \ldots S_{2,\frac{n-2}{2}} \\ n \text{ ungerade} & C_{\frac{n-1}{2}} C_{\frac{n-1}{2}} \quad S_{2,1} S_{2,2} \ldots S_{2,\frac{n-1}{2}} \end{array}\right\} \tag{14}$$

und jedesmal für R_r und R_r' symmetrisch.†

Aus dem in der Einleitung Gesagten folgt auch, dass wenn diese Transformation besteht, die beiden C wirklich quadratisch, also M^2_{r-2} sein müssen und sich

---

* Nach Formel (13).

† Die fundamentalen linearen Substitutionen sind:

für ungerades n,

$$\left.\begin{array}{l} m' = n m - n x_1 - (n-2) x_2 - 2y_1 - \ldots - 2y_{\frac{n-1}{2}}, \\ x_1' = \frac{n-1}{2} m - \frac{n-1}{2} x_1 - \frac{n-3}{2} x_2 - y_1 - \ldots - y_{\frac{n-1}{2}}, \\ x_2' = m - \frac{n-3}{2} x_1 - \frac{n-1}{2} x_2 - y_1 - \ldots - y_{\frac{n-1}{2}}, \\ y_1' = 2m - 2x_1 - 2x_2 - y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\frac{n-1}{2}}' = 2m - 2x_1 - 2x_2 - y_{\frac{n-1}{2}}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

wo $x_1, x_2, y_1, \ldots, y_{\frac{n-1}{2}}$ die Vielfachheiten in $C_{\frac{n-1}{2}}$, $C_{\frac{n-1}{2}}$, $S_{2,1}, \ldots S_{2,\frac{n-1}{2}}$ und die accentulrten jene im Raume R_r' bezeichnen, und

in einer M^2_{r-3} schneiden müssen. Daraus folgt dann, dass das Büschel von $\infty^1 M^2_{r-1}$ durch diese beiden C invariant sein muss. Das Büschel lässt sich nun allerdings durch $(SC)^2$ in ein Büschel von R_{r-1} verwandeln, aber die Transformation wird dann eine von ganz anderer Natur.

Theorem XIV.—Die mit dem Fundamentalsysteme (14) *gebildeten Characteristiken*

$$\left(C_{\frac{n}{2}}\, C'_{\frac{n}{2}}\right),\ \left(C_{\frac{n-2}{2}}\, C'_{\frac{n-2}{2}}\right),\ S' \text{ in } \ldots . S,\ S'_{2,i} \text{ in } \ldots . S'^{h_i}_{2,\lambda_i} \qquad \left(i=1,\ldots . \frac{n-2}{2}\right),$$

$$\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right),\ \left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right),\ S'_{2,i} \text{ in } \ldots . S'^{h_i}_{2,i} = S_{2,\lambda_i} \quad \left(i=1,\ldots . \frac{n-1}{2}\right),$$

$$\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right),\ \left(C_{\frac{n-2}{2},2}\, C'_{\frac{n-2}{2},1}\right),\ S'_{2,i} \text{ in } \ldots . S'^{h_i}_{2,i} = S_{2,\lambda_i} \quad \left(i=1,\ldots . \frac{n-1}{2}\right),$$

sind periodisch und aber reductibel auf niedere Ordnung, falls nicht stets $\lambda_i = i$.

Beweis. Die Transposition $\left(C_{\frac{n}{2}} S_{2,1}\right)^2$ liefert im Falle $\left(C_{\frac{n}{2}}\, C_{\frac{n-2}{2}}\right)$ die Fundamentalsysteme $C'_{\frac{n-4}{2}}\, C'_{\frac{n-2}{2}}\, S'\, S'_{2,2} \ldots . S'_{2,\frac{n-2}{2}}$ in $C'_n C' S' S'_{2,1} \ldots . S'_{2,\frac{n-4}{2}}$, also direct Reduction, wenn $S_{2,1}$ in eine Coincidenz obiger Art eintritt; ist aber Verkettung vorhanden, so kann man durch $\left(C^2_{\frac{n}{2}}\, C_{\frac{n-2}{2}}\, S'_{2,1}\, (S''_{2,1})^2\right)^4$ zunächst Verkürzung der Verkettung hervorbringen und dann neuerdings die Transposition anwenden. In den anderen Fällen geschieht die Reduction analog durch $(CCS)^3$ oder $(C^2C^2S^2S^2)^5$.

Theorem XV.—Die mit dem Fundamentalsysteme (14) *für n gerade gebildete Characteristik*

$$\left(C_{\frac{n}{2}}\, C'_{\frac{n-2}{2}}\right)\left(C_{\frac{n-2}{2}}\, C'_{\frac{n}{2}}\right),\ S' \text{ in } \ldots . S'^{h} = S,\ S'_{2,i} \text{ in } \ldots . S'^{h_i} = S_{2,\lambda_i}$$

$$\left(i=1,\ldots . \frac{n-1}{2}\right)$$

ist, wenn auch nur ein $\lambda_i \neq i$, *stets reducirbar auf niedere Ordnung.*

---

für gerades n,

$$\left.\begin{array}{lllllll}
m' = & n\,m - & n\,x_1 - & (n-2)\,x_2 - & 2y_1 - & \ldots . - & 2y_{\frac{n-2}{2}} - z, \\
x'_1 = & \frac{n}{2}\,m - & \frac{n}{2}\,x_1 - & \frac{n-2}{2}\,x_2 - & y_1 - & \ldots . - & y_{\frac{n-2}{2}} - z, \\
x'_2 = & \frac{n-2}{2}\,m - & \frac{n-2}{2}\,x_1 - & \frac{n-4}{2}\,x_2 - & y_1 - & \ldots . - & y_{\frac{n-2}{2}}, \\
y'_1 = & 2m - & 2x_1 - & 2x_2 - & y_1, & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y'_{\frac{n-2}{2}} = & 2m - & 2x_1 - & 2x_2 & & - & y_{\frac{n-2}{2}}, \\
z' = & m - & 2x_1, & & & &
\end{array}\right\} \qquad (16)$$

wo $x_1, x_2, y_1, \ldots, y_{n-2}, z$ Vielfachheiten in $C_{\frac{n}{2}}\, C_{\frac{n-2}{2}} S_{2,1} \ldots S_{2,\frac{n-2}{2}}, S$ und $x'_1, x'_2, \ldots$ die entsprechenden in R'_r sind.

Beweis. Auch hier wird die Transposition $\left(C^2_{\frac{n}{2}} C^2_{\frac{n-2}{2}} S'^2_{2,1} S'^2_{2,2}\right)^5$ oder, falls Coincidenz vorhanden, sogar schon $\left(C_{\frac{n}{2}} C_{\frac{n-2}{2}} S^2_{2,1}\right)^3$, Reduction der Verkettung bez. weise Reduction der Ordnung liefern.

Theorem XVI.—Die Characteristiken aus XIV (1. *Fall*) *und XV sind reductibel, wenn auch* $S'_{2,i}$ *in* .... S, S' *in* .... $S_{2,k}$ *stattfindet.*

Der Beweis erübrigt nur für $i = k$. In XIV führen genau dieselben Transpositionen zum Ziele, nur ist die Verminderung der Ordnungen eine geringere; desgleichen in XV.

Theorem XVII.—Die Characteristik $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ *mit irgend welcher Ergänzung ist stets reductibel in der Ordnung.*

Denn $\left(C_{\frac{n}{2}} D\right)^2$, wo ein gewöhnlicher invarianter Punkt ist, liefert R_{r-1} in $\left(C_{\frac{n}{2}} D\right)^2$ in $\left(C'_{\frac{n}{2}} D \ldots\right)^n$ in $\left(C'_{\frac{n-1}{2}} \ldots\right)^{n-1}$ und die neue Characteristik hat $\left(C_{\frac{n-1}{2},1} C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$, ... weil der Cyclus, in welchen die Ebene $C_{\frac{n}{2}}$ eintritt, erhalten bleiben muss.

Theorem XVIII.—Die 3. *Characteristik aus XIV wird reductibel in der Ordnung, welches immer die übrigen Theile seien.*

$\left(C_{\frac{n-1}{2}} S'_{2,1}\right)^3$ liefert $\left(C'^{\frac{n+1}{2}}_{\frac{n-1}{2},2} C'^{\frac{n-1}{2}}_{\frac{n-1}{2},1} S'^2_{2,1}, \ldots\right)^{n+1}$ in $\left(C'^{\frac{n-3}{2}}_{\frac{n-1}{2},2} C'^{\frac{n-1}{2}}_{\frac{n-1}{2},1} S'_{2,1} \ldots\right)^{n-1}$, also eine Verminderung der Ordnung um 1 und Umsetzung in die Classe mit geradem n. $S'_{2,1}$ wird der Punkt S_1, welcher erscheinen muss.

Theorem XIX.—Die Characteristiken aus XV sind irreductibel in der Ordnung und periodisch mit dem Index $2N$, *wenn durchwegs* $\lambda_i = i$ *und* N *das kleinste Multiplum aller Zahlen* $h_i + 1$ *und der Zahl* $h + 2$.

Beweis. Man erreicht ihn durch wirkliche Aufstellung der successiven T. Dieselben sind offenbar sämmtlich von demselben Fundamentalsysteme, nur anderer Ordnung, welche sich erhöht, bis bei T^{h_1+1} $\left(\text{wenn } h_1 < h_2 < \ldots < h_{\frac{n-1}{2}}\right)$ oder T^{h+1} der Punkt $S_{2,1}$ oder S in das Fundamentalsystem eingetreten ist. Wenn (SS') vorhanden ist, so werden die Fundamentalsysteme in dieser ersten Abtheilung der Reihe stets abwechselnd von ungerader und gerader Ordnung und beim Bestehen der Coincidenz (SS') wird die Differenzenreihe der Ordnungen in dieser 1. Abtheilung $n-1$, $n-1$, $n-3$, $n-3$, $n-1$, $n-1$, $n-3$, $n-3$, ..., die Vielfachheiten der Punkte S' bilden die Reihe 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, ... u. zw. nicht nur bis zum Eintritte des

ersten S_2, sondern bis zu Ende, sodass ersichtlich der Index der Transformation durch 4 theilbar sein muss. Dass er ausserdem durch $2N$ theilbar sein muss, folgt wie beiden Ionquièresschen Transformationen mit (ab) und ebenso auch, dass stets die kleinere der beiden Zahlen, welche $\equiv 0$ mod. 4 ist, der Index ist.

Im allgemeinsten Falle sieht man, dass $S' \ldots : S$ Bestandtheil einer Kette ist, in welche nur noch die R_{r-1} von C', C und die M^2_{r-1}: $(C'CS')^2$, $(C'CS'^1)^2$, ... $(C'CS)^2$ eintreten, also von der Ordnung $2(h+2)$.

Theorem XX.—Die 2. Characteristik aus XIV ist irreductibel in der Ordnung und periodisch mit dem Index $2N$, wenn N das kleinste Multiplum aller Zahlen $h_i + 1$ ist.

Die successiven Transformationen sind stets von ungerader Ordnung und abwechselnd von der 1. oder 2. Form aus XIV, sodass T^N von der 1. oder 2. Form wird, je nachdem N ungerade oder gerade und T^{2N} eine Collineation wird, in welcher das involutorische Paar $C_{1,1}$ in $C_{1,2}$ in $C_{1,1}$ bereits zur Identität zurückgekehrt ist.

Theorem XXI.—Für n gerade und > 4 ist $C'_{\frac{n}{2}}$ in $C_{\frac{n}{2}}$, $C'_{\frac{n-2}{2}}$ in $C_{\frac{n-2}{2}}$, $(S_{2,i}S'_{2,i})$, (SS') aperiodisch.

Man findet für $n = 6$, also C'_3 in C_3, C'_2 in C_2, $(S_{2,1}S'_{2,1})(S_{2,2}S'_{2,2})$, (SS') die successiven Transformationen $(3, 2, 2, 2, 1)^6(13, 3, 8, 2, 10, 10, 6)^{27}$, $(42, 13, 26, 8, 34, 34, 21)^{128}$, $(240, 42, 154, 26, 180, 180, 122)^{501}$, ... Hieraus ist nach einem Theoreme meiner Preisschrift* zu schliessen, dass umsomehr Aperiodicität stattfindet für die gleichgebauten Characteristiken für $n > 6$.

Theorem XXII.—Für n gerade und > 4 ist $C'_{\frac{n}{2}}$ in $C_{\frac{n}{2}}$, $C'_{\frac{n-2}{2}}$ in $C_{\frac{n-2}{2}}$ nebst irgendwelchen Verkettungen unter den S^2, S' aperiodisch.

Denn die Directrixsubstitution† in XXI ist die für die Periodicität günstigste und nach dem eben erwähnten allgemeinen Theoreme muss Verkettung die Aperiodicität verstärken.

Theorem XXIII.—Für n gerade und > 4 ist $C'_{\frac{n}{2}}$ in $C_{\frac{n-2}{2}}$, $C'_{\frac{n-2}{2}}$ in $C_{\frac{n}{2}}$, ... stets aperiodisch.

Auch dies ist schon aus XXI zu schliessen, da die dortigen Verkettungen die günstigeren sind.

Theorem XXIV.—Für n gerade und > 4 ist $C'_{\frac{n}{2}}$ in $C_{\frac{n}{2}}$, $\left(C_{\frac{n-2}{2}} C'_{\frac{n-2}{2}}\right)$ mit irgend welcher Ergänzung aperiodisch.

---

*IV. Theil, §5. † Cf. die Definition desselben in n. 17 des §1.

Es genügt wie so eben, den Fall $n = 6$, C_3' in C_3, $(C_2 C_2')$, $(S_{2,1} S_{2,1}')$, $(S_{2,2} S_{2,2}')$, (SS') zu behandeln in dem entsteht $(3, ., 2, 2, 2, 1)^6$, $(9, 3, 6, 6, 6, 6)^{19}$, $(18, 9, 14, 14, 14, 13)^{42}$, $(30, 18, 24, 24, 24, 24)^{73}$, $(45, 24, 38, 38, 38, 37)^{114}$, $(63, 45, 54, 54, 54, 54)^{163}, \ldots$, wo die 2. Differenzenreihe der Ordnungen 8, 10, 8, 10, 8, 10, ... wird, und daraus alle anderen Aperiodicitäten zu schliessen.

Theorem XXV.—Für n gerade und > 4 wird $\left(C_{\frac{n-2}{2}} C_{\frac{n}{2}}'\right)$, $C_{\frac{n-2}{2}}'$ *in* $C_{\frac{n}{2}}, \ldots$ *stets aperiodisch.*

Denn die vorherige Characteristik ist ersichtlich günstiger.

Theorem XXVI.—Für n ungerade und > 5 sind $C_{1,\frac{n-1}{2},1}'$ *in* $C_{\frac{n-1}{2},1}$, $C_{\frac{n-1}{2},2}'$ *in* $C_{\frac{n-1}{2},k}, \ldots$ *sowie* $\left(C_{\frac{n-1}{2},1} C_{\frac{n-1}{2},1}'\right)$, $C_{\frac{n-1}{2},3}'$ *in* $C_{\frac{n-1}{2},3}, \ldots$ *mit irgend welchen Ergänzungen aperiodisch.*

Die 1. Characteristik gibt für $n = 7$ die successiven Ordnungen 7, 37, 175, 745, ..., wenn durchwegs Coincidenzen hinzutreten wie in XXI. Die 2. Characteristik hat ein den Ionquièresschen Characteristiken mit b in a ganz analoges Tableau und wird also für $n > 5$ aperiodisch.

Indem noch aus XVIII hinzutritt, dass $\left(C_{\frac{n-1}{2},1} C_{\frac{n-1}{2},2}'\right)$ stets in der Ordnung reductibel bei Erhaltung der Art des Fundamentalsystemes ist, folgt:

Alle Characteristiken der Fundamentalsysteme (14) *wird für $n > 5$, wenn periodisch, mit XIX oder XX äquivalent.*

§5.—*Die periodischen Characteristiken der Fundamentalsysteme* 2. *bis* 5. *Ordnung.*

1. Bereits in den Rendiconti des Istituto Lombardo 1894 konnte ich darthun, dass die periodischen Characteristiken von $(SC)^3$ sind: (SS'), C' in .... C; (CC'), S' in .... S; C' in C, S' in .... S; C' in C_1' in C, S' in S.

2. Die Characteristiken von $(S^2 C_{1,1} C_{1,2})^3$ sind ebenso aus jenen cubischen Characteristiken der Ebene herzuleiten, in welchen die einfachen Fundamentalpunkte paarweise gleich eintreten und b mit a verkettet ist. Diese sind b in a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 in a_3, b_4 in a_4, Index 8; b in b' in .... in $b^{(h-1)}$ in a, $(a_i b_i)$ Index $2(h+1)$ und geben im R_r

$$S' \text{ in } \ldots S'^{(h-1)} \text{ in } S,\ (C_{1,1} C_{1,1}'),\ (C_{1,2} C_{1,2}'), \qquad \text{Index } 2(h+1),$$
$$S' \text{ in } S, \qquad (C_{1,1} C_{1,1}'),\ C_{1,2}' \text{ in } C_{1,2}, \quad \text{Index } 8.$$

Die erstere Characteristik ist im R_r $r > 2$ nicht mehr einer mit (SS') äquivalent, da in der Ebene zu der bezüglichen Transposition nur $(a_1 a_2 a_3)^2$ verwendbar war.

3. Die Characteristiken von $(S_2 S_1 C_2 C_1)^4$ entstehen aus $d_1 d_2 d_3 e_1 e_2 e_3$ der Ebene. Diejenigen mit $(C_3 C_2')$ oder $(S_2 S_2')$ sind reductibel auf Q^3,* die mit $(S_2 S_1')$ und $(C_1 C_2')$ auf Q^3, ebenso $(C_2 C_1')$ und $(C_1 C_2')$. $(S_2 S_1')(C_2 C_1')$ C_2' in C_1, S_2' in S_1 $(2, 1, 2, ., 2, .)^4$, $(2, 2, 5, 2, 5, 2)^{10}$, $(6, 6, 10, 5, 10, 5)^{22}$ $(10, 10, 16, 10, 16, 10)^{37}$, $(17, 17, 24, 16, 24, 16)^{56}$, ... ist aperiodisch. Ebenso C_2' in C_2, $(C_1 C_1')$, S_2' in S_2, $(S_1 S_1')$ wegen Preisschrift p. 251, $(S_2 S_1')$, S_2' in S_1, C_1' in C_2, C_2' in C_1 (ibidem), S_1' in S_2, $(C_2 C_1')$, C_2' in C_1, S_2' in S_1 (ibidem) und S_2' in S_2, S_1' in S_1, C_2' in C_1, $(C_2 C_1')$, wie die Entwickelung sofort lehrt.

Für das 2. Fundamentalsystem folgt aus der Theorie für die Ebene, dass S_3' in $S_3'^1$ in S_3, ... und S_3' in S_3, $C_{1,1}'$ in $C_{1,1}$, ... aperiodisch sind und

$$S_3' \text{ in } S_3;\ (C_{1,1} C_{1,1}')(C_{1,2} C_{1,2}')(C_{1,3} C_{1,3}') \qquad \text{Index } 6$$

hat.

4. $(S_{2,1} S_{2,2} C_{2,1} C_{2,2})^5$ liefert ohne Coincidenz oder mit einer Coincidenz wegen der Ebene Aperiodicität. Auch $(S_{2,1} S_{2,1}')$, $(S_{2,2} S_{2,2}')$, $C_{2,2}'$ in $C_{2,2}$, $C_{2,1}'$ in $C_{2,1}$ mit der Ordnungsreihe 5, 17, 37, 65, ... ist aperiodisch. $(C_{2,1} C_{2,3}')$, $(C_{2,2} C_{2,2}')$ oder $(C_{2,1} C_{2,2}')(C_{2,2} C_{2,1}')$ sind reductibel in der Ordnung durch $(S_{2,1}^2 C_{2,1} C_{2,2})^8$. $(S_{2,1} S_{2,1}')(C_{2,1} C_{2,1}')$ ist reductibel durch $(S_{2,1} C_{2,1})^2$ ebenso jene $(S_{2,1} S_{2,1}')(C_{2,1} C_{2,2}')$ und $(S_{2,1} S_{2,2}')(C_{2,1} C_{2,1}')$. $(S_{2,1} S_{2,2}')(C_{2,1} C_{2,2}')$, $S_{2,1}'$ in $S_{2,2}$, $C_{2,1}'$ in $C_{2,2}$ mit den Ordnungen 5, 13, 29, 49, 77, ... ist aperiodisch. Daher: Alle periodischen Characteristiken 5. O. sind reductibel auf niedere Ordnungen.

§ 6.—*Die periodischen Characteristiken der Fundamentalsysteme* 6. *bis* 17. *Ordnung.*

I. $\begin{pmatrix} S_4 S\ C_{2,1} C_{2,2} C_1 \\ S_2' S_3' C_{1,1}' C_{1,2}' C_3' \end{pmatrix}^6$. $(S_4 C_{2,1})^3$ reducirt $(C_{2,1} C_3')$ oder $(S_4 S_3')(C_{2,1} C_{2,2}')$ oder $(S_4 S_2')(C_{2,1} C_{1,2}')$.—$(S_4 C)^2$ reducirt $(S_4 S_3')(C C_3')$ oder $(S_4 S_2')(C C_3')$.—S_3' in S_4, S_2' in S, $(C_{2,1} C_{1,1}')(C_{2,2} C_{4,2}')(C C_3')$ gibt $(3, ., 2, ., 1, 1, 3)^6$ $(8, 3, 8, 2, 5, 5, 11)^{22}$, $(18, 8, 21, 8, 14, 14, 27)^{56}$, $(42, 18, 42, 21, 34, 34, 61)^{130}$, $(.)^{283}$, ... also Aperiodicität und umsomehr S_3' in S, S_2' in S_4.—S_3' in S_4, $(S S_2')$, $(C_{2,1} C_{1,1}')$, $(C_{2,2} C_{1,2}')(C C_3')$ gibt $(3, ., 2, 1, 1, 3)^6$, $(8, 3, 8, 5, 5, 9)^{20}$, $(16, 8, 17, 17, 17, 23)^{54}$, ...—$(S S_2')$, $(S_4 S_3')(C_1 C_{1,1}')(C_{1,2}'$ in $C_{2,1})(C_3'$ in $C_{2,2})$ gibt $(2, 3, 1, 1, ., 3, .)^6$, $(9, 10, 3, 3, 1, 9, 3)^{20}$, $(22, 26, 9, 7, 3, 18, 9)^{49}$, $(..)^{118}$, ... Aus diesen

* Mit Q^i (statt T) bezeichne ich eine Transformation i. Ordnung im Allgemeinen, während T^i die i. Potenz allgemein bezeichnet.

ist a fortiori zu schliessen, dass alle übrigen irreductibeln Characteristiken aperiodisch sind.

II. $\begin{pmatrix} S_4 S_2 C_3 C_2 C \\ S_2' S_4' C' C_2' C_3' \end{pmatrix}^7$. $(S_4 C_3)^2$ liefert $(C_3'^2 S_2 C_2' S_4'^2)^4$ reducirt also $(C_3 C_3')$ oder $(C_3 C_2')$ oder $(C_2 C_3')$ oder $(S_4 S_4')$.—$(S_4 C_2)^2$ liefert $(C' C_2'^3 C_3'^3 S_2' S_4'^4)^6$.—$(S_4'^2 C_3 C_2)^3$ liefert $(C_2' C_3' S_4'^3)^8$.—$(S_4'^2 C_3 C)^3$ liefert $(C_2'^3 C_3'^2 S_2'^3 S_4'^3)^5$.—$(S_4'^2 C_2 C)^3$ liefert $(S_4'^4 C_2'^3 C_3'^3 S_2'^3 C')^7$ und reducirt $(S_4 S_2')$, $(C_2 C_2')$, $(C C_3')$.—Aus $(S_4 S_2')$, $(S_2 S_4')$, $(C_3 C_1')$, $(C_1 C_3')$, C_4' in C_2; $(S_4 S_2')$, $(S_2 S_4')$, $(C_2 C_2')$, $(C_1 C_1')$, C_3' in C_3; S_4' in S_4, $(S_2 S_2')$, $(C_3 C_1')$, $(C_1 C_3')$, $(C_2 C_2')$, welche aperiodisch sind, ist zu schliessen, dass alle irreductibeln Characteristiken aperiodisch sind.

III. $\begin{pmatrix} S_4 S_2 S C_4 C_2 C_1 \\ S' S_2' S_4' C_1' C_2' C_4' \end{pmatrix}^8$. $(S_4 C_4)^2$ liefert $(S_4'^3 C_4'^3 S_2' C_2')^4$ und reducirt $(C_4 C_4')$ oder $(C_4 C_2')$ oder $(S_4 S_4')$ oder $(S_4 S_2')$.—$(C_1 C_4')$, $(C_4 C_1')$, $(C_2 C_2')(S_1 S_4')(S_4 S_1')(S_2 S_2')$ gibt $(4, 1, 2, 4, 1, 2)^8$, $(48, 6, 9, 12, 6, 9)^{28}$, $(25, 16, 20, 25, 16, 20)^{62}$, $(42, 30, 36, 42, 30, 36)^{109}$, $(64, 49, 56, 64, 49, 56)^{170}$, ...— C_4' in C_4, $(C_2 C_2')$, $(C_1 C_1')$, $(S_1 S_4')$, $(S_4 S_2')$, $(S_2 S_2')$ gibt $(4, ., 2, 1, 4, 1, 2)^8$, $(19, 4, 11, 7, 22, 8, 11)^{49}$, $(58, 19, 51, 30, 73, 34, 51)^{170}$, ..., so dass alle irreductibeln Characteristiken aperiodisch werden.

IV. $\begin{pmatrix} S_4 S_3 C_{1,1} C_{1,2} C_{1,3} C_4 \\ S_1' S_6' C_{2,1}' C_{2,2}' C_{2,3}' C_1' \end{pmatrix}^8$. $(S_4 C_4)^2$ reducirt $(S_4 S_6')$ oder $(C_4 C_2')$.—$(S_6 C_{2,1}')^2$ reducirt $(C_{1,1} C_{2,2}')(S_3 S_6')$.—$(S_6 C_1)^2$ reducirt $(S_3 S_6')(C_4 C_1')$.—$(S_4 S_1')$, S_6' in S_3, $(C_{1,1} C_{2,1}')(C_{1,2} C_{2,2}')(C_{1,3} C_{2,3}')(C_4 C_1')$ wird aperiodisch ebenso diese mit $(S_6' S_3)$ C_1' in C_4.—Aperiodisch werden ferner S_6' in S_4, $(S_3 S_1')$, ... und $C_{2,1}'$ in C_4, $(C_{1,1} C_1')$, $(S_3 S_6')$, $(S_4 S_1')$, $(C_{1,2} C_{2,1}')(C_{1,3} C_{2,3}')$.

So sollen der Raumersparnis wegen von den übrigen 94 Fundamentalsystemen des §2 nur die folgenden untersucht werden, wofür nachher die Berechtigung erwiesen werden soll.

V. $\begin{pmatrix} S_5 S_2 C_3 C_{2,1} C_{2,2} \\ S_3' S_4' C_1' C_{3,1}' C_{3,2}' \end{pmatrix}^8$. $(S_5 C_3)^2$ reducirt $(C_3 C_{3,1}')$.—$(S_5 C_{2,1})^2$ reducirt $(C_{2,1} C_{3,2}')$ $(S_5 S_4')$ oder $(C_{2,1} C_{3,1}')(S_5 S_3')$.—$(S_4' C_{3,1}')^2$ reducirt $(S_4' S_5)$ $(C_{2,1} C_{3,1}')$ oder $(S_2 S_4')(C_{2,2} C_{3,1}')$.—$S_4'$ in S_5, $(S_2 S_3')$, $(C_3 C_1')$, $(C_{3,1} C_{3,1}')(C_{2,2} C_{3,2}')$.—$S_3'$ in S_5, $(S_2 S_4')$, $(C_3 C')$, $(C_{2,1} C_{3,1}')$, $(C_{2,2} C_{3,2}')$.

VI. $\begin{pmatrix} S_{4,1} S_{4,2} C_4 C_{2,1} C_{2,2} \\ S_{4,1}' S_{4,2}' C_4' C_{2,1}' C_{2,2}' \end{pmatrix}^9$. $(S_{4,1} C_4)^2$ liefert $(C_4'^3 S_{4,1}'^3 S_{4,2}'^3 C_{2,1}' C_{2,2}')^6$ und reducirt $(C_4 C_4')$ oder $(S_{4,1} S_{4,1}')(C_4 C_{2,i}')$, während $S_{4,1}'$ in $S_{4,i}$, $S_{4,2}'$ in $S_{4,k}$, $(C_4 C_{2,1}')$, $(C_{2,1} C_4')$, $(C_{2,2} C_{2,2}')$ und $(S_{4,1} S_{4,1}')(S_{4,2} S_{4,2}')$, C_4' in C_4, $(C_{2,1} C_{2,1}')$, $(C_{2,2} C_{2,2}')$ aperiodisch sind.

VII. $\begin{pmatrix} S_4 S_5 C_4 C_3 C_2 \\ S_5' S_4' C_2' C_3' C_4' \end{pmatrix}^{10}$. $(S_5 C_4)^2$ reducirt $(S_5 S_5')$ oder $(C_4 C_4')$ oder $(C_4 C_3')(S_5 S_4')$.—$(S_4 C_4)^2$ reducirt $(S_4 S_4')$.—S_5' in S_4, S_4' in S_5, $(C_2 C_4')$, $(C_4 C_2')$, $(C_3 C_3')$ und S_5' in S_5, S_4' in S_4, $(C_2 C_4')$, $(C_4 C_2')$, $(C_3 C_3')$ wird aperiodisch.

VIII. $\begin{pmatrix} S_4 S_6 C_4 C_{3,1} C_{3,2} \\ S_6'' S_4' C_4' C_{3,1}' C_{3,2}' \end{pmatrix}^{11}$. $(S_6 C_4)^2$ liefert $(S_6''^2 S_4'^2 C_4''^2 C_{3,1}''^2 C_{3,2}''^2)^8$ und reducirt $(S_6 S_6'')$ oder $(C_4 C_4')$ oder $(S_6 S_4')(C_4 C_{3,i}')$.—$(S_4 C_4)^2$ liefert $(S_4'^2 C_4'^2 S_6''^2 C_{3,1}''^2 C_{3,2}''^2)^9$ und reducirt $(S_4 S_4')(C_4 C_4')$.—S_6'' in S_6, $(S_4 S_4')(C_4 C_{3,1}')$ $(C_{3,1} C_4')(C_{3,2} C_{3,2}')$ sowie die Ch. mit zwei Verkettungen sind aperiodisch.

IX. $\begin{pmatrix} S_5 S_6 C_{4,1} C_{4,2} C_3 \\ S_6'' S_5'' C_{4,1}' C_{4,2}' C_3' \end{pmatrix}^{12}$. $(S_6 C_{4,1})^2$ liefert $(S_6''^2 S_5''^4 C_{4,1}''^2 C_{4,2}''^4 C_3''^2)^{10}$ reducirt also $(S_6 S_6'')(C_{4,1} C_{4,1}')$ oder $(S_6 S_5'')(C_{4,1} C_{4,i}')$ oder $(S_6 S_6'')$ $(C_{4,1} C_3')$.—$(S_5 C_{4,1})^2$ liefert $(S_6''^2 S_5''^4 C_{4,1}''^2 C_{4,2}''^4 C_3''^2)^{11}$ reducirt also $(S_5 S_5'')(C_{4,1} C_{4,2}')$. Die übrigen Characteristiken sind aperiodisch.

§7.—*Das Aequivalenztheorem für periodische Characteristiken.*

In der Frage der Aequivalenz bietet sich eine merkwürdige Erscheinung dar. Da unsere Fundamentalsysteme und die aus ihnen abgeleiteten Characteristiken für alle Räume R_r, $r = 2$ eingeschlossen, gelten, so ist es, insofern arithmetische Relationen vorliegen, gleichgiltig, in Bezug auf welchen Raum die Untersuchung angestellt wird. Wiewohl nun die Ordnungen dieser adjungirten M_{r-1} in den verschiedenen Räumen verschieden sind, nämlich $n - r - 1$, und auch die p-Formeln verschieden ausfallen, muss also doch das Endresultat in arithmetischer Beziehung für alle r dasselbe sein. Mit Benützung dieser Unabhängigkeit von r lässt sich die Schwierigkeit, welche für $r > 2$ darin besteht, dass die allgemeinen Reductionstheoreme für M_{r-1} vom Raumgeschlechte $p = 0$ oder 1 oder 2, oder .... $r - 1$ für $r > 2$ nicht mehr bestehen, wenigstens nicht mit solcher Bündigkeit und nicht so durchgreifend, dadurch umgehen, dass man die Behandlung des arithmetischen Problemes einzig und allein im R_2 vornimmt u. zw. an der in der Einleitung dieser Arbeit hinreichend definirten Classe birationaler Transformationen.

Das Theorem,* wonach *jede* periodische Characteristik in der Ebene unendlich viele anallagmatische Singularitätencomplexe u. zw. eines wilkürlich hohen p; gewiss aber eines $p > 2$, $u > 2$ besitzt, gilt in Folge dessen *auch* für die gegenwärtige Classe.

Theorem XXVII.—Die periodischen Characteristiken gegenwärtiger Fundamentalsysteme besitzen auch im R_r anallagmatische Singularitätencomplexe eines willkürlich hohen Raumgeschlechtes p.

---

* Cr. T. Bd. CXIV, p. 50.

† Es ist zu beachten, dass die Gleichheit des arithmetischen und geometrischen p bei homaloidalen M_{r-1} nur in Folge der Fundamental — M_i höherer als 1. Art eine Ausnahme erleiden kann.

Die Formeln für dieses Geschlecht sind ganze rationale Functionen der Ordnung m, der Vielfachheiten y, z in den S und C und der Ordnungen der M_{r-3}, in welchen sich die Fundamental $-M_{r-2}C$ schneiden u. zwar derart, dass je höher diese Ordnungen sind, desto höher (stetig folgend) die Zahl p wird. Mit Vernachlässigung der Zusatzglieder den Beweis führen heisst also nur, denselben verstärken. Dann ist aber die leicht berechenbare Function $p = f(m, y, z)$ von der Art, dass $f(m_1 + m_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ um Vieles grösser als $p_1 + p_2$ und also gibt die Summe der sämmtlichen Transformirten irgend eines Singularitätencomplexes einen anallagmatischen Singularitätencomplex von willkürlich hohem p.

Auch im R_r ist ferner mit einem invarianten Complexe m, y, z auch sein adjungirter Complex invariant. Dieser ist $m - r - 1, y - r + 1, z - 1$.

Aber eben wegen der erwähnten Uebereinstimmung der arithmetischen Eigenschaften der Transformationen in allen R_r folgt jetzt, dass jeder Singularitätencomplex, welcher in einem R_r invariant ist, auch in irgend einem anderen $R_{r'}$, invariant ist. Insbesondere also sind die aus einem invarianten Complexe durch Adjunction von M_1^{m-3} abgeleiteten invarianten Complexe auch in jedem R_r invariant und allgemein gilt:

Theorem XXVIII.—Für jeden in einer der gegenwärtigen periodischen Characteristiken invarianten Complexe kann man neue invariante Complexe herleiten durch Bildung der folgenden, wo i jede ganze positive Zahl, resp. jede solche $< m + 1$ bedeuten kann

$$\left.\begin{array}{lll} m - i - 1, & y - i + 1, & z - 1 \\ m + i + 1, & y + i - 1, & z + 1 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

oder

in jedem R_r, insbesondere also in der Ebene.

Diese Complexe sind aber jedesmal nur im R_i die nach der Theorie der algebraischen Functionen von $r + 1$ Variabeln zu der M_{r-1}^m "adjungirten." Es ist also auch in der Ebene nur für $i = 2$ die Dimension u des Complexes (17) gleich dem p des Ausgangscomplexes.

Theorem XXIX.—Sind in einer ebenen birationalen Transformation r_1, r_2, r_3 die drei höchsten Vielfachheiten in Fundamentalpunkten, so ist

$$3\left[\frac{n+1}{2}\right] \geqq r_1 + r_2 + r_3 \geqq n + 1.$$

Hiedurch ist das ursprüngliche Nöthersche Theorem (Math. Ann., Bd. II) genauer präcisirt. Nach der Theorie der Maxima und Minima tritt die untere

Gränze ein, wenn möglichst wenige, die obere, wenn möglichst viele Gruppen gleicher Vielfachheit vorhanden sind. Wenn nur 2 Gruppen u. zw. $\sigma_1 \alpha_1$-fache, $\sigma_2 \alpha_2$-fache Punkte vorhanden sind, so ist für $\sigma_1 > \sigma_2$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Denn aus $\sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2 = 3(n-1)$, $\sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 = n^2 - 1$ folgt $\sigma_1\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1) = (n-1)(3\alpha_2 - n - 1)$ und $\sigma_2\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2) = (n - 1 - 3\alpha_1)$, also $\sigma_1\alpha_1 : \sigma_2\alpha_2 = [3\alpha_2 - (n+1)] : [n + 1 - 3\alpha_1]$, sodass stets $\alpha_1 > \frac{n+1}{3}$, $\alpha_2 < \frac{n+1}{3}$ sein muss, wenn nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{n+1}{3}$ ist, und wenn $\alpha_1 < \alpha_2$, muss wegen des 2. Quotienten auch $\sigma_1\alpha_1 > \sigma_2\alpha_2$, also σ_1 verhältnismässig viel grösser als σ_2 sein. Dann lehrt die Discussion von $\alpha_1 + 2\alpha_2 = n + 1$, dass $\alpha_1 = n - 1$ sein muss. Für 3 Gruppen wird stets $r_1 + r_2 + r_3 > n + 1$. Also:

Das Minimum in XXIX wird nur erreicht für $n = 2, 5, 8, 17$ mit bezüglich $r_1, r_2, r_3 = (1, 1, 1)$; $(2, 2, 2)$; $(3, 3, 3)$; $(6, 6, 6)$ und für $\alpha_1 = n - 1$, $\alpha_2 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2(n-1)$. Das Maximum findet man durch Betrachtung einiger besonderer Classen.

Theorem XXX.—Ein Singularitätencomplex, welcher durch eine birationale ebene Transformation gegenwärtiger Classe anallagmatisch ist, muss stets so beschaffen sein, dass sich diejenigen Singularitäten, welche sich auf Fundamentalpunkte der Vielfachheiten γ beziehen, in Paare gleicher Vielfachheit ordnen.

Denn jeder solche Complex ist auch anallagmatisch für die gleiche Characteristik genommen im R_r und da daselbst die C nicht zerfallen sind, so müssen die Singularitäten in den γ-fachen Punkten der Ebene paarweise zusammentreten können zu einer einzigen C-Singularität. Der Satz kann aber auch durch Zusammensetzung aus elementaren Singularitätencomplexen bewiesen werden, das ist aus solchen, welche in Bezug auf die vorgelegte Characteristik minimale Ordnung und minimale Singularitäten besitzen.

Theorem XXXI.—Für einen durch gegenwärtige Characteristiken anallagmatischen Singularitätencomplex muss, wenn er $p = 0$, $u = 2, 1$, hat, die Summe der Vielfachheiten in den Punkten der S-Art $\leq n - 1, n, n + 1$ sein.

Für $p = 0$, $u = 2$ hat man einen homaloidalen Complex und da er ausserdem XXX zufolge der Bedingung aus der Einleitung genügt, so kann man ihn als Fundamentalsystem einer gegenwärtigen Transformation verwenden, also muss zufolge II die Summe der S-Singularitäten $n - 1$ sein. Für $p = 0$, $u = 1$ tritt, wenn mindestens ein einfacher S-Punkt unter den Basispunkten des Büschels ist, das Maximum von $\Sigma\sigma$ ein, und dann folgt $\Sigma\sigma = n$ aus den $\Sigma\sigma = n - 1$

für $u = 2$. Wenn die Reducirbarkeit durch Q^2 supponirt würde, kann die Richtigkeit des Theoremes für n vorausgesetzt und eine weitere Q^2 angewendet werden. Dieselbe muss, damit die Eigenschaft XXX erhalten bleibe, sich stets zweier gepaarter γ-Punkte bedienen, oder keiner. Die neue Ordnung wird $n' = 2n - 2\gamma - \sigma_1$ und es ist $\sigma_2 + \ldots + \sigma_\lambda = n - 1 - \sigma_1$, das neue σ_1' wird $\sigma_1' = n - 2\gamma$, die übrigen $\sigma_2' \ldots \sigma_\lambda'$ sind gleich $\sigma_2, \ldots \sigma_\lambda$. Also wegen der Voraussetzung $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\lambda = n$

$$\sigma_1' + \ldots + \sigma_\lambda' = n - 2\gamma + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\lambda = 2n - 2\gamma - \sigma_1 - 1 = n'.$$

Dies gilt aber auch, wenn $p = 0$, $u = 0$ vorhanden ist.

Theorem XXXII.—Für einen durch gegenwärtige Characteristiken anallagmatischen Singularitätencomplex muss, wenn er $p = 1$ hat, die Summe der σ-Vielfachheiten $< n + 1$ sein.

Zum Beweise kann man sich des Umstandes bedienen, dass der Singularitätencomplex, welcher durch eine Characteristik anallagmatisch ist, auch noch anallagmatisch bleibt, wenn nur die einzelnen Fundamentalsysteme getrennt betrachtet werden. Denn da in der Characteristik nur S-Punkte mit S'-Punkten verkettet oder coincident sein sollen, so werden in der getrennten Lage die Singularitäten der S'-Punkte mit denen der S-Punkte übereinstimmen müssen. Das hier eben losgetrennte Fundamentalsystem, in welchem es eine Abtheilung Fundamentalpunkte gibt, für welche $\Sigma\sigma = n - 1$, kann aber immer so gedacht werden, dass diese Punkte in einer Geraden sind, welche dann wieder in eine Gerade transformirt wird. Es muss aber in jedem Fundamentalsysteme nicht zerfallende Complexe $p = 0$ oder $p = 1$ geben und da, damit der Complex jetzt nicht zerfalle, die Summe der Vielfachheiten in den S-Punkten nicht $> n$ sein darf, so muss es also Complexe geben, welche $p = 1$ und gleichzeitig $\Sigma\sigma < n + 1$ haben. Weil es ferner in einer periodischen Characteristik überhaupt und also auch in einer periodischen der gegenwärtigen Art nur *ein* System mit $p = 1$ geben kann (und auch dies nur, wenn es unter gewissen Bedingungen kein $p = 0$, $u = 1$, 2 gibt) so muss dieses unter jenen enthalten sein, es muss also eben für dieses $\Sigma\sigma \leqq n$ sein.

Theorem XXXIII.—Wenn in einem Singularitätencomplexe mit $p = 0$, $u = 2$, $r_1 + r_2 < n - 1$, so ist $r_1 + 2r_3 > n$.

Es sei $r_1 = n - 1 - \delta$, $r_2 = \delta$, dann kommt für die übrigen Punkte

$$\sum_{3}^{\sigma} r_\rho^2 = 2n - 2 + 2\delta(n - 1 - \delta),$$

$$\sum_{3}^{\sigma} r_\rho = 2n - 2.$$

Es sei dem Theoreme entgegen $r_3 = \frac{\delta + 1}{2}$ aber nicht grösser. Dann ist die Maximalquadratsumme, welche durch die Zerlegung von $2n - 2$ in Summanden entsteht, jene,* wo möglichst viele r_ρ diesen Maximalwerth haben, also etwa alle. In diesem Falle ist die Anzahl $2(2n - 2) : (\delta + 1)$ und die Quadratsumme wird $(2n - 2)(\delta + 1) : 2$. Dieses ist dennoch stets $< 2n - 2 + 2\delta(n - 1 - \delta)$ oder $(2n - 2)(\delta + 1) - 2\delta^2$, da $2\delta^2 < (n - 1)(\delta + 1)$, weil $\delta(2\delta - n) < n - \delta - 1$. Also muss $r_3 > \frac{\delta + 1}{2}$ oder $2r_3 > \delta + 1$, $r_1 + 2r_3 > n$ sein.

Es sei $r_1 = n - 1 - \delta$, $r_3 = \delta'_\lambda < \delta$, dann kommt

$$\sum_{3}^{\sigma} r_\rho^2 = (2n - 2)(\delta + 1) - \delta^2 - \delta'^2,$$

$$\sum_{3}^{\sigma} r_\rho = 2n - 2 + \delta - \delta'.$$

Hier wird die Maximalquadratsumme entstehen für die Zerlegung in $2(2n - 2 + \delta - \delta') : (\delta + 1)$ Summanden $\frac{\delta + 1}{2}$ und wird sein $(2n - 2 + \delta - \delta')(\delta + 1) : 2$, was $<$ als obige Summe, wenn $2(n - 1)(\delta + 1) - 2\delta^2 - 2\delta'^2 > (\delta - \delta')(\delta + 1)$ oder $2(n - 1)(\delta + 1) - 4\delta^2 > \delta - \delta'$, was stets ist.

Theorem XXXIV.†—*Wenn in einem Singularitätencomplexe* $p = 0$, $u = 1$, $r_1 + r_3 < n - 1$, *so ist* $r_1 + 2r_3 > n$.

Die Formeln $\sum_{1}^{\rho} r_\rho^2 = n^2$, $\sum_{1}^{\sigma} r_\rho = 3n - 2$ führen zu denselben Schlüssen. Ebenso durch $\sum_{1}^{\sigma} r_\rho^2 = n^2 - 2$, $\sum_{1}^{\sigma} r_\rho = 3n - u$.

---

* Nach Sturm, Math. Ann., Bd. XXI: "Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung," p. 468.

† Ich führe das Theorem XXXIV mit dem Bedeuten an, dass, wenn man XXXII nicht als streng bewiesen ansieht, man es besser entbehren wird, wie im Beweise.

Theorem XXXV.— Wenn in einem Singularitätencomplexe mit $p = 1$, $u > 0$, $r_1 + r_2 < n$, *so ist* $r_1 + 2r_3 > n$ *mit Ausnahme von* $n = 3s$, $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = s$ *oder* $n = 4$, $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = \ldots = 0$.

Lemma I.— Wenn ein Singularitätencomplex $p = 0$, $u = 2$ *oder* $p = 0$, $u = 1$ *durch gegenwärtige Characteristiken anallagmatisch ist, so können* r_1, r_2, r_3 *nicht sämmtlich unter den S-Punkten enthalten sein.*

Denn ihre Summe ist $> n$, während die Summe der Vielfachheiten des Complexes in den S-Punkten $\leq n - 1$ ist.

Lemma II.— Wenn ein Singularitätencomplex mit $p = 0$, $u = 2$, *oder* $p = 0$, $u = 1$ *durch gegenwärtige Characteristiken anallagmatisch ist, so können* r_1, r_2, r_3 *nicht sämmtlich unter den C-Punkten enthalten sein.*

Ueberträgt man den Complex mit $(r_1, r_2, r_3)^2$, so entstehen Ordnung $2n - r_1 - r_2 - r_3$ und drei Vielfachheiten $n - r_2 - r_3$, $n - r_1 - r_3$, $n - r_1 - r_2$. Diese drei können nicht die höchsten des neuen Complexes sein; denn sie erscheinen im neuen Complexe unter den S-Punkten (weil der Kegelschnitt in eine Gerade verwandelt wird) wo sie nach Lemma I nicht sein dürfen. Also muss wenigstens $n - r_1 - r_2 < r_4$ sein oder $r_1 + r_2 + r_4 > n$ und in Folge dessen auch $2r_1 + r_4 > n$, wo nun r_1 unter den C-Punkten, r_4 unter den S-Punkten ist.

Eine Ausnahme macht nur das Kegelschnittbüschel, wenn die 4 Basispunkte sich in zwei Paare von C-Punkten theilen, wie dies bei den Transformationen des §4 der Fall sein kann.

Lemma III.— Wenn ein Singularitätencomplex mit $p = 1$, $u > 0$ *und mehr als* 8 *Punkten durch unsere gegenwärtigen Characteristiken anallagmatisch ist, so können nicht* r_1, r_2, r_3 *unter den S-Punkten enthalten sein.*

Denn wie im nächsten § bei einer noch wichtigeren Frage bewiesen wird, sind die drei höchsten Vielfachheiten des anallagmatischen Complexes stets in den drei höchsten Fundamentalpunkten der Transformation enthalten und da diese nicht unter den S-Punkten der Characteristik sein können wegen Lemma I, so können es auch jene nicht sein. Will man die Beweise der Theoreme XXXIV und XXXV als hinreichend gelten lassen, so kann man auch diese hier verwenden.

Lemma IV.— Wenn ein Singularitätencomplex mit $p = 1$, $u > 0$ *und mehr als* 8 *Punkten durch unsere gegenwärtigen Characteristiken anallagmatisch ist, so können nicht* r_1, r_2, r_3 *unter den C-Punkten enthalten sein.*

Die Uebertragung durch $(r_1, r_2, r_3)^2$ führt unter Vorraussetzung von Lemma III zum selben Widerspruche wie in II.

Theorem XXXVI.—Jeder Singularitätencomplex $p = 0$, $u = 2$, welcher durch die gegenwärtigen Characteristiken anallagmatisch ist, ist auch sogar durch Transpositionen $(SC)^2$ auf ein Geradennetz reducirbar.

Denn die drei höchsten Vielfachheiten können nicht sämmtlich S, noch sämmtlich C-Punkte sein wegen Lemma I und II. Wären nun r_2, r_3 unter den S-Punkten, r_1 unter den C-Punkten, so gäbe es stets noch einen zweiten r_1 unter den C-Punkten wegen XXX und dann ist $r_2 + 2r_1 > n$. Wären r_1, r_3 unter den S-Punkten, r_2 unter den C-Punkten, so gäbe es stets noch einen zweiten r_2 unter den C-Punkten, und dann ist $2r_2 + r_1 > n$. Wäre r_1 unter den S-Punkten, r_2, r_3 unter den C-Punkten, so gäbe es stets noch einen r_2 und einen r_3, falls nicht $r_2 = r_3$, jedenfalls wird $r_1 + 2r_2 > n$. Es bleibt nur der Fall, dass r_1 r_3 unter den S-Punkten seien und r_2 unter den C-Punkten. Für diesen ist aber in XXXIV bewiesen worden, dass $r_1 + 2r_3 > n$ und da sich ein zweiter r_3 unter den C-Punkten finden muss, so ist die reducirende Transposition $(r_1, r_2, r_3)^2$ stets möglich.

Theorem XXXVI.—Jeder durch die gegenwärtigen Characteristiken anallagmatische Singularitätencomplex $p = 0$, $u = 1$ ist auch sogar durch Transpositionen $(SC)^2$ auf ein Büschel von $n = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = \ldots = y_\sigma = 0$ oder $n = 2$, $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ reducirbar.*

Der Beweis wiederholt sich wie vorhin, nur ist wegen der Ausnahme zum Lemma II dem Geradenbüschel des durch Nöther bekannten Satzes das Kegelschnittsbüschel hinzuzufügen.

Theorem XXXVII.—Jeder durch die gegenwärtigen Characteristiken anallagmatische Singularitätencomplex $p = 1$, $u > 0$ ist auch sogar durch Transpositionen $(SC)^2$ auf ein lineares System von Curven 3. Ordnung oder von Curven 4. Ordnung mit zwei festen Doppelpunkten reducirbar.

Der Beweis von XXXIV führt, wenn einmal Theorem XXXI und Lemma III als wahr erwiesen sind, auch hier zum Ziele.

Theorem XXXVIII.—Alle periodischen Characteristiken von Transformationen unserer Classe $(S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots)^n$ sind durch Transpositionen aus derselben Classe äquivalent entweder Collineationen oder:

---

* Oder mit anderen Zeichen $(r_1, \widehat{r_k, r_k})^2$.

1. *Transformationen des* §3 *mit coincidirenden* $S^{n-1}S'^{n-1}$.
2. *Transformationen des* §4 *mit coincidirenden* $(CC')(CC')$.
3. *Transformationen mit weniger als* 9 *Punkten der Art* S *und der Art* C.

Beweis. Die Characteristik besitzt unendlich viele anallagmatische Singularitätencomplexe der Art des Theoremes XXX. Werden hiefür die adjungirten Complexe gebildet, so sind auch diese anallagmatisch und es ist unmöglich, dass das p—abgesehen von eventuellen Schwankungen—nicht im Ganzen dauernd abnehme. Es bedarf hiefür keines besonderen Beweises, weil ja die Singularitäten fortwährend abnehmen. Entweder also man gelangt zu einem Complexe, der mit einem hohen p aber unzureichenden Singularitäten nur in einer Collineation anallagmatisch sein kann oder man gelangt zu Curven 3. O. oder man gelangt zu einem Complexe mit $p=0$, $u=2$, worauf also XXXV anwendbar ist, oder mit $p=0$, $u=1$, worauf XXXVI anwendbar ist oder $p=1$, $u>0$, worauf XXXVII anwendbar ist. Bei $p=1$, $u=1$ geht man einen Schritt zurück und hat man dann wieder $u=1$, so wendet man mein Theorem aus Acta Math. XIX an, wonach der Fall $p=1$, $p_1=1$, $p_2=1$ nur bei $C_{88}9\alpha^8$ möglich ist. Wenn man endlich durch $p<0$ aufgehalten wird, so gilt auch hier, dass das Zerfallen nur in einen festen Complex, und einen Complex $u>0$, oder in mehrere Complexe eines und desselben Systemes $u=1$ stattfinden kann. Dann wendet man auf diesen Complex von $u>0$ dieselben genannten Theoreme an.

Theorem XXXIX.—In jedem R_r *sind die periodischen Characteristiken aller Fundamentalsysteme, welche durch Zusammensetzung aus quadratischen Transformationen* $(SC)^2$ *entstehen, durch ebensolche Transpositionen äquivalent einer der folgenden Characteristiken.*

1. *Collineationen, welche die* S *für sich und die* C *für sich vertauschen,*
2. *Characteristiken der Art* $((S_{n-1}S'_{n-1}),\ C'_{1,i}$ *in* $\ldots\ C'^{hi}_{1,i}=C_{1,i})^n$
$$(i=1,\ \ldots\ n-1).$$
3. *Characteristiken der Art* $\left(\left(C_{\frac{n}{2}}C'_{\frac{n-2}{2}}\right)\left(C_{\frac{n-2}{2}}C'_{\frac{n}{2}}\right)S'\right.$ *in* $\ldots\ S'^h=S,$
$$\left.S'_{2,i}\ \textit{in}\ \ldots\ S'^{hi}_{2,i}=S_{2,i}\right)^n\left(i=1,\ \ldots,\frac{n-2}{2}\right)\ n\ \textit{gerade.}$$
3. *Characteristiken der Art* $\left(\left(C_{\frac{n-1}{2},1}C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)\right.$
$$\left.S'_{2,i}\ \textit{in}\ \ldots\ S'^{hi}_{2,i}=S_{2,i}\right)^n\ \left(i=1,\ \ldots\ \frac{n-1}{2}\right)\ n\ \textit{ungerade.}$$

4. *Der quadratischen Characteristik C' in C, S' in .... $S'^k = S$).**
5. *Der quadratischen Characteristik C' in C'_1 in C, S' in S.*
6. *Der cubischen Characteristik $(C_{1,1}C'_{1,1})\,C'_{1,2}$ in $C_{1,2}$, S' in S.*
7. *Der biquadratischen Characteristik $(C_{1,1}C'_{1,1})(C_{1,2}C'_{1,2})(C_{1,3}C'_{1,3})$, S' in S.*

Beweis. Im vorigen Theoreme sind bereits die Complexe $n=4$, $y_1=y_2=2$, $y_3=\ldots\ldots=y_\sigma=0$, weggelassen, da sie nothwendig auf $((CC'),\ S'$ in .... $S)^2$ führen und dieses mittelst $(SC)^2$ auf Collineation reducirbar ist. n. 2 ist im §3, n. 3, und 4 sind im §4, bewiesen worden. Im §5, 6 wurden alle (SC)-Fundamentalsysteme mit λS und μC, sodass $\lambda + 2\mu < 9$, untersucht und sind auf 1.–6. transponirt worden.

§8.—*Das Aequivalenztheorem für die endlichen Gruppen von Characteristiken.*

Aus einer Anzahl N von Characteristiken dieser Art kann man endliche Gruppen bilden, indem stets nur wieder die C mit den C und die S mit den S zur Verkettung oder Coincidenz gebracht werden. Eine Anzahl solcher Gruppen habe ich in meiner Note über die Q^2† erwähnt. Im Anschlusse an die bisherige Theorie lässt sich nun eine vollständige Theorie dieser Gruppen geben und zwar auf Grund eben des Kunstgriffes, der dort zum Ziele geführt hat. Nämlich es ist die Constitution der endlichen Gruppen dieser Art in allen Räumen dieselbe und man kann sie also studiren, indem man ihnen jene substituirt, welche in der Ebene von den birationalen Transformationen der in der Einleitung definirten Art so componirt werden, dass die S-Punkte von den C-Punktepaaren stets gesondert‡ bleiben.

Ich werde mich hier noch kürzer fassen als in meiner Theorie der ebenen endlichen Gruppen, um zu der Aufstellung des Aequivalenztheoremes zu gelangen. Dass es in jedem R_r anallagmatische Singularitätencomplexe von über jeder willkürlichen Gränze liegenden p gibt, wird wie in §7 bewiesen, ebenso das Theorem, dass sich hieran eine in Ordnung und endlich sicher auch in Geschlecht abnehmende Reihe successiver adjungirter Singularitätencomplexe knüpft, welche ebenfalls anallagmatisch ist. Die Hilfstheoreme über die Complexe mit $p=0$

* Es sei angemerkt, dass die involutorischen Potenzen der Characteristiken 5. durchwegs vom Typus n. 3. oder 4. sind.

† Rendiconti Ist. Lomb. 18. November 1894.

‡ Cf. mein Buch: "Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene."

oder 1 und ihre Reducirbarkeit durch successive $(SC)^2$ übertragen sich nach ihrem Beweise in §7 hierher. Ihre Anwendung für Theorem XXXVIII ist dann auch hier dieselbe, nur ist hier das System $C_4 a_1^2 a_2^2$ als wesentlich zu betrachten, weil es zu einer irreductibeln Gruppe von Q^2 Anlass gibt.

Theorem XL.—In jedem R_r sind alle endlichen Gruppen von Characteristiken solcher Fundamentalsysteme, welche aus $(SC)^2$ allein zusammensetzbar sind, durch eben solche Transpositionen äquivalent mit folgenden Typen:

I. *Gruppen collinearer Vertauschungen der S unter sich und der C unter sich.*

II. *Gruppen quadratischer Characteristiken mit allen gemeinsamer (CC').*

III. *Gruppen von Characteristiken $(S_{n-1} S'_{n-1})$, $C'_{1,i}$ in ... $C'^{hi}_{1,i} = C_{1,i}$, welche gemeinsame Coincidenz (SS') haben.*

Diese Gruppe enthält eine ausgezeichnete* typische Untergruppe.

IV. *Gruppen von Characteristiken mit zwei gemeinsamen $(CC')(CC')$ und Verkettungen von $S'_1 S'_2$ mit $S_1 S_2$ über einer endlichen Anzahl N von Punkten.*

Diese Gruppe enthält ausgezeichnete typische Untergruppen, welche im folgenden § aufgezählt werden sollen.

V. *Die Gruppe aller Characteristiken, welche über drei C und zwei S verlegt werden können und ihre typischen Untergruppen.*

§9.—*Untersuchung der Typen endlicher Gruppen von Characteristiken.*

I. *Die Gruppen von Collineationen.* Dieselben sind intransitive Gruppen von Vertauschungen und die Systeme der Intransitivität sind die Punkte S, die C, die der Gruppe hinzugefügten gewöhnlichen Punkte, welche wieder in Systeme der Intransitivität zerfallen können.

II. *Die Gruppen von Q^2 mit gemeinsamer (CC').* Ueber einer willkürlichen Anzahl N von Punkten kann man alle möglichen (CC'), S' in .... S verlegen und dieselben bilden eine endliche Gruppe. Da die Punkte S und die (CC') gleichmässig vertauscht werden, folgt:

Theorem XLI.—Man kann in einer willkürlichen Gruppe von Vertauschungen des Grades n einem beliebigen Elemente die Bedeutung von (CC') zuschreiben, um das Muster für die Zusammensetzung einer Gruppe des Typus n. II zu haben.

Nimmt man willkürlich einen Punkt D als invariant durch alle Charac-

---

* Das Wort "ausgezeichnet" ist hier und gleich hernach in dem präcisen Sinne der Gruppentheorie genommen.

teristiken der Gruppe an, so kann dennoch die ganze Gruppe mittelst $(DC)^2$ auf eine Gruppe von Collineationen reducirt werden.

III. *Die Gruppen mit gemeinsamen* $(S_{n-1} S'_{n-1})$. Jede Characteristik dieser Art lässt sich aus einer involutorischen Characteristik $(SS')(C_{1,i} C'_{1,i})$ und aus einer Collineation, welche die C unter einander vertauscht, zusammensetzen. Diese Collineation vertauscht gleichzeitig die $S^2 C$ unter einander und lässt den Punkt (SS') fest. Die Collineationen bilden für die Characteristiken einer Gruppe selbst wieder eine Gruppe, obzwar sie mit den involutorischen Characteristiken nicht vertauschbar sind.* Sei N die Gesammtzahl aller C und ihrer Einschaltlinge.

Theorem XLII.—Alle Characteristiken dieser Art über demselben Punkte (SS') *und einer bestimmten Directrixgruppe* H *unter den* C *bilden eine endliche Gruppe. Die Directrixgruppe kann auch die symmetrische Gruppe für* N *Elemente sein.*

Diese Gruppe kann die Totalgruppe für H, ev. für die N Elemente heissen. Die Anzahl dieser Characteristiken wird erhalten, indem man irgend 1, 2, ... N der C für ein Fundamentalsystem der Ordnung 2, 3, 4, ... $N+1$ (cf. §3) auswählt, desgleichen für das zweite u. zw. gemäss H, wenn diese gegeben, oder ganz willkürlich, wenn die totale Matrixgruppe entstehen soll. Die letztere Gruppe besitzt dann in den Vertauschungen unter den C und den $S^2 C$ die Paare C_i und $S^2 C_i$ als Systeme der Imprimitivität.

Theorem XLIII.—Alle Characteristiken ungerader Ordnung über demselben Punkte (SS') *und einer beliebigen Anzahl* N *von* C *bilden eine endliche Gruppe.*

Beweis. Wenn die Ordnung ungerade ist, so ist die Anzahl der C_i des Fundamentalsystemes gerade und diese Characteristiken kann man genau den Characteristiken der orthanallagmatischen Gruppe der Ebene über N Punkten mit Isomorphie entsprechen machen. Die Gruppe ist ausgezeichnete Untergruppe von XLII.

Corollar.—Auch alle Characteristiken ungerader Ordnung über derselben Directrixgruppe H bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der bezüglichen Gruppe XLII.

IV. *Die Gruppen mit zwei gemeinsamen* (CC'). Auch hier gilt, dass jede Characteristik sich aus einer involutorischen Characteristik und einer Directrix-

---

* Cf. Theorem LXI, pag. 25, meines Buches: "Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene." I. Theil. Die dort definirte "Totalgruppe," welche keine geometrische Bedeutung in der Ebene haben konnte, erhält hier eine solche, indem man die Elemente $a_1, a_2, \ldots$ als Vertreter der C_1 und nicht der in ihnen zusammengetretenen Punkte betrachtet.

substitution zusammensetzen lässt, welche als eine Collineation aufgefasst werden kann. Diese lässt bei geradem n die Folge $S' \ldots . S$ wie in der Characteristik und bringt dann aber den Punkt S nicht direct nach S', sondern nach einem Zwischenelemente, welches der durch $C'_{\frac{n}{2}}$ gedachte R_{r-1} ist und von hier im Falle $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ nach S' oder im Falle $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n-2}{2}}\right)$ in eine $M^2_{r-1}(CC'S')$ und weiter (cf. §4. Th. XIX. am Ende), lässt ferner wie oben bei Gruppe III auf $S'_{2,i}$ die Verkettungen bis $S_{2,i}$, aber nach $S_{2,i}$ das Element $S'_{2,i}$ folgen. Ebenso für n ungerade. Werden nun mit t_i die einzelnen involutorischen Characteristiken bezeichnet, nämlich welche S_i in (CCS_i) in S_i verwandeln, alle übrigen der N Punkte fest lassen, mit u_i jene, welche S_i in Γ in S_i verwandeln, wo Γ den R_{r-1} durch $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$, mit v_i jene, welche S_i in Γ in $(CC'S_i)^2$ in Γ' in S_i verwandeln, wo Γ, Γ' die R_{r-1} durch $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n-2}{2}}\right)$, $\left(C_{\frac{n-2}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ sind, so kann man zunächst v_i aus u_i durch Zusammensetzung mit einer Collineation herleiten, denn

$$u_i = (S_i, \Gamma)(\Gamma', (CC'S_i)^2) \text{ gibt mit } h_i = (\Gamma, \Gamma')(S_i)((CC'S_i)^2)$$

eben v_i. Dann hat man aber das Lemma: $t_i u_k . H = H . t_{i+1} u_{k+1}$ wie in der Ebene* und hieraus wie in der Ebene das

Theorem XLIV.—Die zu dem Producte zweier Characteristiken gehörige Directrixsubstitution ist das Product der Directrixsubstitutionen der beiden einzelnen Characteristiken.

Denn wenn I, I' Producte von t sind, hat man $IH . I'H' = II'_1 HH'_1$ wo II'_1 involutorisch mit identischer Directrixsubstitution, dh. wieder ein Product von t ist, sodass HH' als neue Directrixsubstitution gelten darf. Hieraus folgt:

Theorem XLV.—Alle Characteristiken, welche über zwei festen C und einer Anzahl N von Punkten denkbar sind, bilden eine endliche Gruppe, falls alle ihre Directrixsubstitutionen eine endliche Gruppe H bilden. Diese kann auch die symmetrische Gruppe unter den N Punkten S, resp. den zwei C sein.

In letzterem Falle entsteht die über den N Punkten und den zwei C mögliche Totalgruppe. Man hat sämmtliche Arten des §4 durchzugehen, hiemit das n alle ungeraden Werthe bis $2N+1$ durchlaufen zu lassen und diese $\frac{n-1}{2}$ Punkte jedesmal auf alle Arten über die N Punkte zu vertheilen und diese Fundamen-

* Das cit. Buch., p. 28, Th. LXXII.

talsysteme mit allen Directrixsubstitutionen der Gruppe H zu componiren, wobei die $N-n$ übrigen Punkte jedesmal als gewöhnliche Punkte zu gelten haben. Dann hat man für gerades n die N Punkte auf alle Arten in N_1 und N_2 zu theilen, die Zahl n jedesmal alle geraden Werthe bis $2N+2$ durchlaufen zu lassen und $\frac{n-2}{2}$ Punkte auf alle möglichen Arten über die N_2 Punkte zu vertheilen, mit jeder Art dann alle möglichen Lagen von S über den N_1 Punkten zu combiniren und jedes so erhaltene Fundamentalsystem mit allen Directrixsubstitutionen von H zu componiren. Hiezu kommen noch die beiden Arten von $Q^2=(SC)^2$, welche ihr (CC') über je einer der C haben und resp. die zweite C unverändert lassen, die N Punkte aber gemäss H vertauschen. Die Anzahl aller dieser Characteristiken ist endlich.

Theorem XLVI.—Die Totalgruppe IV §8 *über den C, C, S .... S_N vertauscht die N Punkte S, die $R_{r-1}:\Gamma, \Gamma'$, die M^2_{r-1} durch C, C' und je einen Punkt S sämmtlich unter einander und bringt unter diesen $2N+2$ Elementen eine zu ihr isomorphe Gruppe hervor.*

Es folgt das aus den obigen Bemerkungen, dem Th. XXI und dem Umstande, dass die Characteristik durch die Angabe der Substitution unter den $2N+2$ Elementen auch hinsichtlich ihrer Art des §4 vollständig individualisirt ist.*

Hiebei entstehen aus den Characteristiken gerader Ordnung $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ nie Substitutionen, welche nur einen Cyclus besitzen könnten, weil der Cyclus mit Γ von dem mit (CCS) getrennt sein muss.

Theorem XLVII.—Die Totalgruppe über jener Directrixgruppe, welche aus der alternirenden Gruppe unter den N Punkten und aus $(C)(C)$ besteht, ist eine ausgezeichnete Untergruppe der Totalgruppe IV §8.

Denn die Directrixgruppe ist eine ausgezeichnete Untergruppe von der gesammten Directrixgruppe.

Ausser dieser gibt es noch weitere typische Untergruppen, welche aufzuzählen sind:

1ter. *Typus von Untergruppen der Gruppe IV. Theorem XLVIII. Alle Characteristiken mit $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)$, also ungerader Ordnung, welche über N Punkten und zwei festen C bei gegebener Directrixgruppe H gebildet werden können, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe von IV, falls die H ausgezeichnet ist in deren Directrixgruppe.*

---

*Cf. l. c. p. 27, n. 2.

Also insbesondere, wenn H die Gesammtgruppe über N Buchstaben ist. Zwei Characteristiken dieser Art geben zusammengesetzt eine Characteristik derselben Art. Denn jedenfalls muss das Product ungerader Ordnung sein, da auch bei Coincidenz von Punkten S_2 das Product ungerader Zahlen um gerade Zahlen zu vermindern ist und aber beide Factoren der Composition lassen die $R_{r-1}:\Gamma, \Gamma'$ ungeändert somit auch das Product. Lässt man n alle ungeraden Werthe bis $2N+1$ durchlaufen, nimmt auf alle möglichen Arten $\frac{n-1}{2}$ Punkte als $S_{2,i}$ eines Fundamentalsystemes zu C, C hinzu, und verbindet jedes Fundamentalsystem mit H, so hat man die Totalgruppe über H, und, wenn H die Gesammtgruppe, überhaupt die Totalgruppe.

Theorem XLIX.—Beschränkt man in XLVIII die Characteristiken dadurch, eine gerade Anzahl Punkte S_2 (oder S_2') zu haben, also von Ordnungen der Form $4q+1$ zu sein, so entsteht eine ausgezeichnete Untergruppe von XLVIII.

Denn zweier Product hat wieder eine gerade Anzahl S, weil bei Coincidenz zweier S von der Summe zwei Punkte verloren gehen. Aus demselben Grunde hat die Uebertragung QPQ^{-1}, wenn Q ungerade oder gerade, P gerade Anzahl von Punkten S_2 hat, eine gerade Anzahl von Punkten S_2.

2ter. *Typus von Untergruppen der Gruppe IV. Theorem L. Alle Characteristiken mit* $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$ *über einer gegebenen Directrixgruppe H unter N Punkten und zwei C bilden eine ausgezeichnete Untergruppe von IV, falls H ausgezeichnet ist in deren Directrixgruppe.*

In dieser Gruppe ist jedoch die Gruppe aus XLVIII enthalten. Die Ordnungen müssen durchwegs ungerade sein. Die Characteristiken vertauschen Γ, Γ' unter einander und die Producte aus einer geraden Anzahl ihrer sind also Characteristiken aus XLVIII. Die Construction der Totalgruppe über H ist wie bei XLVIII.

Es gibt eine ausgezeichnete Untergruppe zu Th. L, nämlich wo alle Characteristiken eine gerade Anzahl S, also Ordnungen $4q+1$ haben.

3ter. *Typus von Untergruppen der Gruppe IV. Theorem LI. Alle Characteristiken mit* $\left(C_{\frac{n}{2}}\, C'_{\frac{n-2}{2}}\right)\left(C_{\frac{n-2}{2}}\, C'_{\frac{n}{2}}\right)$ *über einer Anzahl N gegebener Punkte und zwei festen C und mit einer Directrixgruppe H bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe IV, wenn H ausgezeichnet in deren Directrixgruppe ist.*

Also insbesondere, wenn H die Gesammtgruppe der Vertauschungen von N

Elementen ist. Diese Gruppe enthält auch alle quadratischen Characteristiken C' in C, welche über die S und C verlegbar sind. Sie enthält ferner Characteristiken ungerader Ordnung der Art des Th. L und also, falls sie vollständig ist, die ganze Gruppe des Th. L über der H, enthält aber keine Characteristik mit $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$.

Eine Untergruppe dieser Gruppe ist jene, wo H in Bezug auf die S und die S_2 intransitiv ist, d. h. wo N_1 Punkte stets nur als S_2 verwendet und unter einander verkettet sind.*

Eine Untergruppe dieser Gruppe ist wieder jene, wo alle Characteristiken gerade Anzahl Punkte $S_{2,i}$ besitzen, also Ordnungen der Form $4q+2$ haben.

Denn wenn zwei Punkte $S_{2,i}$ coincidiren, so gehen von der Summe der Punkte $S_{2,i}$ stets gleichzeitig zwei verloren.

4ter. *Typus von Untergruppen der Gruppe IV. Theorem LII. Alle Characteristiken mit $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ über demselben C und $\left(C_{\frac{n-2}{2}} C'_{\frac{n-2}{2}}\right)$ über derselben zweiten C und über einer gegebenen Anzahl N von Punkten und einer Directrixgruppe H bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe IV, wenn H ausgezeichnet in deren Directrixgruppe ist.*

Also insbesondere, wenn H die Gesammtgruppe von Vertauschungen ist. Zwei Characteristiken haben als Product eine Characteristik aus XLVIII., falls eine Coincidenz zweier S eintritt, jedoch nie eine aus L. Tritt keine Coincidenz von S ein, so entsteht stets wieder $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$, denn die Ordnung des Productes ist jedenfalls gerade und wenn keine S mit S'_2 verkettet sind, bleiben ersichtlich die Cyclen mit Γ und $(CC'S)$ getrennt (cf. §6). Ist aber S mit S'_2 einmal coincident, so lehrt der Fall $n=4$, also die Characteristik $(C_2C'_2)(C_1C'_1)(SS'_2)S'$ in .... S_2 rasch, dass die Wiederholung wieder $\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)$ besitzt und zwar über derselben C.

Eine Untergruppe dieser Gruppe ist jene, wo H in Bezug auf die S und die S_2 intransitiv ist, d. h. wo wie oben die S und die S_2 je unter einander verkettet sind. *Eine Untergruppe dieser Gruppe ist wieder jene, wo alle Characteristiken gerade Anzahl Punkte $S_{2,i}$ besitzen, also Ordnungen der Form $4q+2$.*

5ter. *Typus von Untergruppen der Gruppe IV.* Als solche kann man jene auffassen, welche Characteristiken aller 5 Arten enthalten, ohne mit der Total-

* Man mag es aber auch für gut halten, die Gruppen, wo die S unter sich und die S_2 unter sich verkettet oder coincident sind, jedesmal als selbständige Typen von Untergruppen zu betrachten.

gruppe IV zu coincidiren. Wenn man nämlich mit dem 4. Typus eine Characteristik derselben Art aber mit dem $\left(\frac{C_n}{2}\frac{C'_n}{2}\right)$ über der zweiten C verbindet oder mit dem 3. Typus eine Characteristik des 4. Typus, entsteht jedesmal die noch fehlende Art von Characteristiken.

Eine Untergruppe ist jene, wo die S und S_2 je unter sich verkettet sind und eine Untergruppe dieser wieder jene, wo die Anzahl der S_2 gerade, also die Ordnungen aller Characteristiken von der Form $4q + 2$ sind.

V. *Die Gruppe über drei C und zwei S. Theorem LIII. Die Anzahl der Characteristiken dieser Gruppe ist* $12^2.6 = 864$.

Collineationen gibt es 2.6, Fundamentalsysteme $(SC)^2$ gibt es 6 und jedes kann mit allen Collineationen zu einer Characteristik verbunden werden, also 12.6. Fundamentalsysteme $(S^2CC)^3$ gibt es 2.3 und also 6.12 Characteristiken, $(S^2SC^2C)^4$ gibt es $2.3.2$, also 12.12 Characteristiken, $(S^3CCC)^4$ gibt es 2, also 2.12 Ch., $(S^2S^2C^2C^2)^5$ gibt es 3, also 3.12 Ch., $(C^2C^2C^2S^4S)^6$ gibt es 3.2, also 6.12 Ch., $(C^3C^2C^2S^5S^2)^8$ gibt es 3.2, also 6.12 Ch., $(S^4S^4C^4C^2C^2)^9$ gibt es 3, also 3.12 Ch., $(C^4C^3C^2S^5S^4)^{10}$ gibt es $3.2.2$ also 12.12 Ch., $(C^4C^3C^3S^6S^4)^{11}$ gibt es 3.2, also 6.12 Ch., $(C^4C^4C^3S^6S^5)^{12}$ gibt es 3.2, also 6.12 Ch., $(C^4C^4C^4S^6S^6)^{13}$ gibt es 1, also 12 Ch., insgesammt $(1 + 6 + 6 + 12 + 2 + 3 + 6 + 6 + 3 + 12 + 6 + 6 + 1).12 = 72.12$.

Theorem LIV.—Die Gruppe ist holoedrisch isomorph zu einer Gruppe unter 48 *Elementen, mit zwei Systemen der Intransitivität von* 24 *und* 24 *Elementen.*

Die 2 Punkte S, die 3 R_{r-1} durch die C, die 6 M^2_{r-1} durch je 2 C und 1 S, die 2 M^3_{r-1} durch die 3 C und 1 S, die 6 M^4_{r-1} durch je 1 C^2, 2 C, 1 S^2, 1 S, die 3 M^5_{r-1} durch C, 2 C^2 und 2 S^2, die 2 M^6_{r-1} durch $S^3S^2C^2C^2C^2$ können als U_{r-1} auftreten (cf. §1) und werden unter einander transformirt. Die 3 C, die 6 M^2_{r-1} durch S^2C, die 6 M^4_{r-1} durch $S^2S^2C^2C$, die 6 M^6_{r-1} durch $S^4S^2C^2C^2C$, die 3 M^8_{r-1} durch $S^4S^4C^3C^2C^2$ können als V_{r-1} auftreten (cf. §1) und werden unter einander transformirt. Ferner ist durch die Angabe der Substitution unter diesen 48 Elementen entweder keine oder nur eine unserer Characteristiken bestimmt, woraus die Holoëdrie folgt. Eine Characteristik ist aber dann und nur dann möglich, wenn die Substitution die Anzahl der Schnittpunkte je zweier Singularitätencomplexe, wenn dieselbe wie für ebene Curven berechnet wird, ungeändert lässt, also, wie ich es dargethan habe,* die Form F_{12}† ungeändert lässt.

---

* Cf. mein Buch, I. Theil §8. † Ib. p. 6.

Theorem LV.—Die Gruppe unter den 48 *Elementen ist überdies imprimitiv mit* 24 *Paaren der Imprimitivität.*

Von jenen 24 Elementen wird jedes Paar, dessen Singularitätencomplexe sich zu $(S^2S^2C^2C^2C^2)^6$ ergänzen, und von diesen 24 jedes, dessen Complexe sich zu $(S^4S^4C^2C^2C^2)^6$ ergänzen, ungetrennt bewahrt, weil diese beiden Complexe anallagmatisch sind.

Eine kurze Ueberlegung wird dem Leser genügen, um einzusehen, dass die in den §§1–9 angegebenen Formeln und abgeleiteten Theoreme ihre (arithmetische) Giltigkeit behalten, wenn auch für die Fundamentalsysteme der in den ersten Zeilen des §1 gemachte Vorbehalt fallen gelassen wird, so lange nur die in n. 17 des §1 ausgesprochene Einschränkung in Geltung bleibt.

§10.—*Die Aequivalenztheoreme für die periodischen Transformationen und die endlichen Gruppen von Transformationen.*

Im §8 ist bewiesen, dass wenn eine periodische Transformation eines der gegenwärtigen Fundamentalsysteme existirt, ihre Characteristik aus einer der typischen periodischen Characteristiken abgeleitet sein muss und zwar, insofern die Transposition mittelst existirender Fundamentalsysteme geschieht, aus einer existirenden typischen Characteristik durch existirende Transposition. Es entsteht also nur die Frage, ob die Transposition, welche nach §7 auffindbar und dahin wirksam sein soll, dass sie die Characteristik auf ihren Typus reducirt, auch stets, oder wenigstens eine von ihnen, auf die vorgelegte Transformation anwendbar sein muss. Hiezu ist es zunächst erforderlich, das transponirende Fundamentalsystem durch successive $(SC)^2$ zusammenzusetzen und es durch successive Transpositionen mittelst dieser zu ersetzen. Es ist die Frage darauf reducirt, ob jedesmal die erste $(SC)^2$, welche die Characteristik in der Ordnung oder in der Anzahl der S, C reducirt, auch in dem realen Falle der Transformation mit deren Fundamentalsysteme vereinbar, das heisst auf dasselbe situirbar sei.

In der Ebene trat nun bei dem entsprechenden Anlasse das Bedürfnis in Kraft, gegenüber dem unendlichen Annähern von Characteristikpunkten Vorrichtsmassregeln zu treffen. Für $r > 2$ ist dies nicht mehr nöthig; denn das unendliche Annähern der beiden in C zusammengewachsenen Punkte verliert seinen Sinn und das unendliche Annähern von S an C führt in den Fällen der zu

reducirenden Singularitätencomplexe entweder ein Zerfallen der M_{r-1} herbei oder hindert es die Anwendung der $(SC)^2$ nicht, weil die den S vertretenden Berührungs R_{r-1} (oder Osculations R_{r-1}) nicht mit dem R_{r-1} von C coincidiren.

Dagegen setzt von $r > 2$ an eine Schwierigkeit ein, welche in der Ebene noch unmerkbar war, *nämlich ob diejenige Varietät C, auf welche das C der $(SC)^2$ zukommen hätte, wirklich quadratisch, also eine M^2_{r-2} sei.* Beachtet man jetzt, dass die Reduction stets geschehen ist im Wege eines Singularitätencomplexes $p = 0$ und $u = 2$, 1 oder 0, nebst etwa einem solchen mit $p = 1$, $u > 0$, so wird zu beweisen sein, dass die höchsten C dieser Complexe im R_r stets M^2_{r-2} zu Trägern haben müssen. Hiefür aber wird gewiss Gewähr geleistet sein, wenn bewiesen wird, *dass diese C mit den C coincidiren, welche Träger der höchsten Vielfachheiten im einen oder anderen Fundamentalsysteme sind.* Denn hiemit tritt sofort die Bemerkung des §1 in Kraft, wonach diese letzteren C stets nothwendig M^2_{r-2} sind. Der eben ausgesprochene arithmetische Hilfssatz folgt aus der Transposition der blossen Characteristiken.

Denn wie immer eine etwa irreductible Transformation beschaffen sei, man kann aus den typischen Characteristiken* immer eine andere durch Transposition ableiten, welche mit ihr dieselbe Characteristik besitzt und effectiv besteht und effectiv reductibel ist. Für diese Transformation muss also der Satz gelten. Da derselbe aber rein arithmetischer Natur ist, so gilt er für jede Transformation, welche mit jener gleiche Characteristik hat, also wiederholend: In jeder periodischen Transformation (welche nicht typisch ist) wird die C, welche Träger der höchsten Vielfachheit eines Singularitätencomplexes $p = 0$, $u = 2$, 1, 0 oder $p = 1$, $u > 0$ ist, eine M^2_{r-2} sein. Hierbei ist noch zu bemerken, dass die p von R_r nicht nach dem R_r, sondern gemäss der Ebene berechnet werden, also unter Ersetzung jedes C durch zwei gleich hohe Fundamentalpunkte.

Indessen kann man den Hilfssatz auch direct beweisen wollen und wird hierzu von den typischen Characteristiken ausgehen, in welchen jene Singularitätencomplexe in ihrer typischen Form, d. i. als Geradennetz oder Büschel oder als ∞^1 System von C_3 auftreten. Ohne Rücksicht auf die Characteristik und deren äquivalente Form wird man nur zu beweisen haben, dass, wenn sie durch eine existirende Transposition unserer Art (Fundamentalsystem des §1) transponirt wird, die höchste Vielfachheit des transponirten Complexes im neuen Raume

* Damit ist nicht einmal die Voraussetzung includirt, dass die einer construirbaren Transformation zugehörige typische Characteristik auch constructibel sein müsse.

auf das C der höchsten Singularität im transponirenden Fundamentalsysteme zu liegen kommt. Auf Grund des Lemmas: Wenn zwei Fundamentalcurven r_i. und $r_{i'}$. Ordnung durch denselben Fundamentalpunkt r_{ki} fach und $r_{ki'}$ fach gehen und $r_i > r_{i'}$ (also auch $r_{ki} > r_{ki'}$) so ist stets auch $r_i - r_{i'} \geqq r_{ki} - r_{ki'}$)$\delta$* schliesst man den Hilfssatz, den für die Geraden die transponirte Curve ihre höchsten Vielfachheiten in den höchsten Fundamentalpunkten hat und auf Grund des *Lemmas*: Wenn zwei Fundamentalcurven r_i. und $r_{i'}$. Ordnung durch dieselben 6, 7, 8 Fundamentalpunkte r_{ki} und $r_{ki'}$ fach gehen $(i = 1, \ldots . 6, 7, 8)$, so ist wenn $r_i > r_{i'}$, auch $3(r_i - r_{i'}) > \sum_1^{\sigma}(r_{ki} - r_{ki'})$, $(\sigma = 6, 7, 8)$ schliesst man den Hilfssatz für das ∞^3, ∞^2, ∞^1 System von C_3. Hiemit ist der 2. Beweis des Haupttheorems vollendet:

Theorem LVI.—Alle periodischen Transformationen, deren Fundamentalsysteme sich aus quadratischen $(SC)^2$ zusammensetzen lassen, sind durch eben solche Transpositionen äquivalent mit einem der folgenden Typen:

1. *Collineationen.*
2. *Transformationen mit der Characteristik* $(S_{n-1}S'_{n-1})\, C'_{1,i} \ldots . C'^{h}_{1,i} = C_{1,i}$.
3. *Transformationen mit der Characteristik* $\left(C_{\frac{n-2}{2}} C'_{\frac{n}{2}}\right)\left(C_{\frac{n}{2}} C'_{\frac{n-2}{2}}\right)$, S' *in* $\ldots . S$, $S'_{2,i}$ *in* $\ldots . S'^{h}_{2,i} = S_{2,i}$.
4. *Transformationen mit der Characteristik* $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$, $S'_{2,i}$ *in* $\ldots . S'^{h}_{2,i} = S_{2,i}$, *oder*

   den quadratischen Transformationen C' *in* C, S' *in* $\ldots . S'^{h} = S$,
5. *den quadratische Transformation* C' *in* C'_1 *in* C, S' *in* S.

Dass die 2. Classe nur constructibel ist, wenn alle h gleich sind, wird im nächsten § ersichtlich sein, ebenso dass die biquadratische Characteristik n. 6 des §7 nicht constructibel ist.

Theorem §11.—*Alle endlichen Gruppen von Transformationen, deren Fundamentalsysteme sich aus quadratischen $(SC)^2$ zusammensetzen lassen, sind im R_r durch eben solche Transpositionenen äquivalent mit einem der folgenden Typen:*

1. *Collineationsgruppen.*
2. *Gruppen mit gemeinsamer Coincidenz* $(S_{n-1}S'_{n-1})$.
3. *Gruppen mit zwei festen* (CC') *und einer endlichen Anzahl Punkten* S.
4. *Gruppen mit* 3 C *und* 2 S.

---

* Dieser sowie die gleich folgenden Sätze gehen also weiter als die in die Parenthese gesetzte Beobachtung Bertini's, welche hier nicht ausreicht.

§11.—*Construction der typischen periodischen Transformationen.*

I. Aus jeder *periodischen Collineation* kann man durch Transposition unendlich viele existirende Transformationen herleiten.

II. *Die Transformationen mit* $(S_{n-1}S'_{n-1})$. Die R_{r-1} durch (SS') sind in Collineation und in jedem invarianten R_{r-1} derselben entsteht eine Transformation derselben Art ebenso in jedem invarianten R_i und jeder invarianten Ebene durch S. Für diese ist bewiesen, dass nur entweder alle h_i einander gleich oder 1 oder 2 derselben Null sein können und daraus folgt, dass dasselbe auch im R_r stattfinden muss. Die Transformation besitzt eine M_{r-1} von Hemicyclen, welche die Kegel $S^2C'_{1,i}, \ldots . S^2C_{1,i}$ in den $C'_{1,i}, \ldots . C_{1,i}$ berührt. Es folgt aber auch wie in der Ebene:

Theorem LVIII.—Wenn eine $M^n_{r-1}(S^{n-2})$ *eine eindeutige Correspondenz trägt, so dass die mit S alineirten Punktepaare wie in einer Collineation transformirt werden und der Berührungskegel an die* M^n_{r-1} *aus S sich in lauter quadratische Kegel theilt, so ist diese Correspondenz in unendlich vielen Transformationen gegenwärtiger Art enthalten.**

Für jedes n und h existirt eine Form, wo eine M^2_{r-1} invariant und (SS') der Doppelpunkt einer Collineation ist, welche M^2_{r-1} in sich transformirt.

III. *Die Transformationen mit* $(CC')(CC')$. 1. Beide C sind M^2_{r-2}, welche sich in einer M^2_{r-3} schneiden und M^2_{r-1} des durch sie gehenden Büschels sind unter einander transformirt. Von den Zahlen $h+2$, h_i+1 müssen also auch hier entweder alle gleich oder 1 oder 2 Null sein. Der Index unter den M^2_{r-1} kann nur bei Transformationen ungerader Ordnung gleich 1 sein, weil 2 der Minimalwert von $h+2$ ist.

2. Ferner lassen die Transformationen ungerader Ordnung das R_{r-1}-Paar durch CC'—eine M^2_{r-1} des Büschels—fest und daher, weil die Kegel des Büschels unter einander transformirt werden müssen, ist der Index 1 oder 2, falls beide Kegel eigentlich sind und kann nur dann > 2 werden, wenn sich die C in einer M^2_{r-3} schneiden, welche einen Doppelpunkt besitzt.

3. Die allgemeinsten birationalen Transformationen, welche jede M^2_{r-1} eines Büschels in sich transformiren, entstehen so, dass man im R_{r-1} ein rationales ∞^1 System birationaler Transformationen annimmt und diese von einem

* Da diese Transformationen in einer noch allgemeineren Classe wieder erscheinen, so ist es angemessen, ihre Eigenschaften gelegentlich dieser zu behandeln.

festen Punkte O der Büschelbasis stereographisch auf die ihnen projectiv zugewiesenen M_{r-1}^2 hinauf projicirt.

Hier müssen die Verwandtschaften in den einzelnen M_{r-1}^2 collinear u. zw. da keine Fundamentalgebilde als nur Fundamentalpunkte entstehen sollen, in ∞^1 involutorischen Perspectivitäten enthalten sein, deren Centra eine rationale auf die M_{r-1}^2 projectiv bezogene Curve O_n bilden werden. Dann entstehen $2n+1$ Punkte S_2, und die Ordnung der Transformation ist $4n+3$, und wenn O_n die C, C' in δ Punkten trifft, ist die Ordnung $4n-2\delta+3$. Dasjenige Centrum, welches dem R_{r-1}-Paare entspricht, bewirkt in diesem eine involutorische Vertauschung, woraus zu schliessen ist, dass die Characteristiken $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)$ mit dem Index 1 nicht existiren und allgemeiner, indem man die Wiederholung beachtet: *Die Characteristiken* $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)$ *sind für* $h+1$ *ungerade nicht construirbar.*

4. *Die Transformationen mit* $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$ *und ungeradem* $h+1$ *sind äquivalent solchen, welche durch Zusammensetzung der obigen Involutionen mit thatsächlich existirenden Collineationen entstehen.* Denn die 2. Wiederholung von $S'_{2,i}$ in .... $S''^{2q}_{2,i} = S_{2,i}$ hat lauter Verkettungen $S'_{2,i}$ in .... $S_{2,k}$ und ist also (§4) äquivalent der Collineation. Die hiezu verwendbare Transposition führt aber die interne Involution (welche die M_{r-1}^2 mit dem Index 1 transformirt) in sich selbst über. Wenn man also eine Collineation hat, welche die beiden C in sich transformirt, ebenso die Fundamentalpunkte der Involution unter einander vertauscht, so liefert dieselbe mit der Involution zusammengesetzt die Characteristik.

5. Die Transformationen $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)$ mit geradem $h+1$ sind nach §4 äquivalent der Collineation. Die Transformationen $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$ mit geradem $h+1$ können wie für $h=0$ construirt werden durch stereographische Projection der M_{r-1}^2 aus einem Punkte O der Basis. Es entsteht ein rationales System von $(SC)^2$, deren C die Projectionen der in den $\infty^1 M_{r-1}^2$ enthaltenen Kegel mit dem Scheitel O sind und also in einem A_{r-2} des R_{r-1} ein Büschel bilden. Die Punkte S', S erfüllen zwei Curven, welche Projectionen der Transformirten von O durch die Transformation sind.

6. Eine particuläre Form dieser Transformationen, sowie jener von gerader

Ordnung ist die, wo eine invariante M^3_{r-1} existirt, welche durch beide C und alle Punkte S_2 und S nebst deren Einschaltlingen geht. Dieselbe enthält stets eine Doppelvarietät* und kann von einem ihrer Doppelpunkte auf den R_{r-1} projicirt werden. Kennt man die Characteristik in der M^3_{r-1}, so ist die M^n_{r-1} durch diese und die einem ebenen Schnitte entsprechende Varietät bestimmt und daher kann die Construction auf die Construction einer periodischen Transformation im R_{r-1} (Projectionsträger) gegründet werden. Da eine homaloidale M^n_{r-1} die M^3_{r-1} in einer M^{n+2}_{r-2} schneidet, so ist sie von der $(n+2)$. Ordnung.

7. Jede Transformation gerader Ordnung hat N gerade und daher als interne involutorische Transformation eine solche ungerader Ordnung u. zw. $\left(C_{\frac{n-1}{2},1}\, C'_{\frac{n-1}{2},1}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},2}\, C'_{\frac{n-1}{2},2}\right)$. Hieraus folgt, dass auch sie eine Varietät M_{r-1} von Hemicyclen besitzt.

IV. *Die quadratische Transformation C' in C'_1 in C, S' in S* ist von mir in den Rendiconti Ist. Lomb. 1894 construirt worden.

V. *Die cubische Transformation $(C_{1,1}C'_{1,1})$, $C'_{1,2}$ in $C_{1,2}$, S'_2 in S_2.* Es ensteht zuerst die Frage, ob $(C_1C'_1)$ im R_r eine M^4_{r-2} sein könne, für welche $S'S$ Doppelgerade wäre. Eine Ebene durch $S'S$ würde M^4_{r-2} nicht mehr in zwei weiteren Punkten schneiden können, denn ein R_3 durch sie würde nach einen M^3_1 ausschneiden durch die 2 Punkte und über die Gerade, der also, da nicht jede Ebene die M^4_{r-2} in einem Kegelschnitte schneiden kann, in eine Gerade durch die 2 Punkte und eine andere zerfallen müsste, was nicht sein darf. Das Nichtvorhandensein der 2 Punkte bewirkt dann, dass die Characteristik gestört wird. Es sei $C'_2M^4_{r-2}$, also auch C_2. Eine Ebene T, welche in S einen Zweig von C_2 berührt, muss† einer Ebene entsprechen, welche C_2 in 2 Punkten und C'_2 in einem Punkte schneidet, die alineirt sind. Hiezu ist nöthig, dass C'_2 und also auch C_2 die C_1 in derselben M^3_{r-3} berühren, da C'_2 die C_2 in einer M^4_{r-3} schneiden muss, damit die Ordnung $4.3-4$ (auf C_1) $= 8$ sich auf 4 erniedrige. Es müssen die Ebenen durch $S'S$ an diese M^2_{r-3} sich unter einander und den Osculationsebenen in S oder S' entsprechen, was nicht möglich ist. Also sind auch C'_2 und C_2 von der 2. Ordnung. Sie schneiden $(C_1C'_1)$ je in einer M^2_{r-3}, aber nicht sich gegenseitig, damit die Ordnung $2.3-2$ (auf C_1) $= 4$ auf 2 sich reducire. Sie sind also in einer invarianten M^2_{r-1} enthalten. Die durch $S'S$ an diese gehenden Berührungsebenen werden unter einander transformirt und es wird jedenfalls

* Cf. meine Note: Rendiconti Ist. Lomb. Ser. II, vol. XXVII, 8 November 1894.

† Preisschrift III.

auch ganz invariante Ebenen geben. Diese müssten eine cubische Transformation b in a; $(a_1 b_1)(a_2 b_2)$, b_3 in a_3, b_4 in a_4 enthalten. Da diese äquivalent mit der inconstructibeln (Γ_8) ist, so ist sie selbst auch inconstructibel, woraus ich schliesse, *dass die Characteristik im R_r ebenfalls nicht constructibel ist.*

V. *Die Transformation S''^3 in S^3, $(C_{1,1} C'_{1,1})$, $(C_{1,2} C'_{1,2})$, $(C_{1,3} C'_{1,3})$ existirt nicht.* Da in dem Fundamentalsysteme immer die C_1, welche 2. Ordnung ist, der C_1 entspricht, welche 6. Ordnung ist, so folgt, dass alle 3 C 2. Ordnung sein und sich in M^2_{r-3} schneiden müssen, also in einer M^2_{r-1} enthalten sind, wenn die M^2_{r-3} nicht für alle drei dieselbe ist. In jedem Falle wird es aber invariante Ebenen durch $S'S$ geben und da in der Ebene die biquadratische Characteristik b in a, $(a_i b_i)$, $(i = 1 \ldots . 6)$ in keiner Form constructibel ist, so kann es auch die vorliegende nicht sein.

§12.—*Die typischen endlichen Gruppen von Transformationen.*

I. Die endlichen Gruppen von Collineationen im R_3 oder R_r sind noch nicht bekannt. Es ist hier nicht der Ort, über die Anfänge zur Lösung des Problemes zu sprechen.

II. *Die quadratischen Gruppen mit (CC').* Particuläre Formen derselben habe ich bereits früher* construirt und auch das Theorem ausgesprochen, dass jede solche endliche Gruppe *die stereographische Projection einer Gruppe von Collineationen ist, welche eine M^2_r des R_{r+1} in sich transformirt.*

III. *Die Gruppen mit gemeinsamer Coincidenz $(S_{n-1} S'_{n-1})$.* Wie für die ebenen orthanallagmatischen Gruppen† kann man nun auch hier beweisen:

Theorem LIX.—Wenn eine $M^n_{r-1}(S^{n-2})$ eine Gruppe eindeutiger Correspondenzen trägt, welche in einer Gruppe von Collineationen unter den Stralen von (SS') enthalten ist, und überdies der Berührungskegel aus (SS') in lauter quadratische Kegel zerfällt, so kann man auf unendlich viele Arten eine endliche Gruppe von Transformationen gegenwärtiger Art bestimmen, welche diese Gruppe von Correspondenzen enthalten.

Die endlichen Gruppen von R_{r-1}, welche hier benöthigt sind, sind, wie schon in §11 erwähnt, noch nicht bekannt. Jeder Klasse solcher Gruppen wird

---

*Rendiconti Ist. Lomb. 8 Nov. 1894.

†Cf. mein Buch: Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin, Mayer & Müller, 1895.

dann eine Klasse gegenwärtiger Gruppen entsprechen. Eine particuläre Form dieser Gruppen ist jene, wo eine invariante M^2_{r-1} vorhanden ist.

IV. *Die Gruppen mit zwei* (CC'). 1. Unter den M^2_{r-1} durch C_1, C_2 muss eine der bekannten 5 binären Gruppen entstehen und diese muss für den 1. und 2. Untertypus von §9 der Kreistheilungstypus sein, weil diese die $M^2_{r-2}:(\Gamma+\Gamma')$ ungeändert lassen. Wenn zwei eigentliche Kegel vorhanden sind, ist überhaupt nur der Index 1 oder 2 zulässig. Für den 3. und 4. Typus von IV §9 sind sowohl bei einem als bei zwei eigentlichen Kegeln alle 5 Gruppen möglich, da die Transformationen gerader Ordnung das R_{r-1}-Paar in jede M^2_{r-1} des Büschels, auch in einen der Kegel, verwandeln können.

2. Eine besonders wichtige Gruppe ist jene, wo alle M^2_{r-1} des Büschels invariant sind. Hiezu bedürfte es aber vorher einer genaueren Kenntnis der Gruppen von Collineationen im R_r, welche eine M^2_{r-1} invariant haben, von denen ich schon oben in II. Gebrauch machte (cf. unten n. 4.).

3. Dagegen hat Herr C. Jordan (Liouv.-Journ. 1874) die Collineationen studirt, welche alle M^2_{r-1} eines Büschels ungeändert lassen. Hieran müsste das Studium der Gruppen von Collineationen gefügt werden, welche die M^2_{r-1} des Büschels unter einander vertauschen, in diesem Falle einfacher der Gruppen von Collineationen, welche C_1, C_2 invariant lassen oder unter einander vertauschen. *Construirt man über zwei solchen* C_1, C_2 *irgend eine der in* §11 *erwähnten, involutorischen Transformationen mit* $(CC')(CC')$, *und verbindet dieselbe mit der Collineationsgruppe, so erhält man eine typische Gruppe.*

4. Da zwei involutorische Perspectivitäten, welche eine M^2_{r-1} fest lassen, nur dann eine endliche Gruppe geben, wenn ihre Centra conjugirte Punkte der M^2_{r-1} sind, so kann man nun eine endliche Gruppe, wie folgt, construiren. Man mache eine Punktreihe g_1 projectiv dem Büschel von M^2_{r-1} und suche auf einer Geraden g_2 die zu ihr projective Punktreihe der conjugirten Punkte bezüglich der jedesmal entsprechenden M^2_{r-1} und benütze sie für diese als Centra von Perspectivitäten. Allgemeiner: Wenn man $2, \ldots . r-1, r+1$ Curven mit einer linearen ∞^1 Reihe von Punktepaaren, -Tripeln, -Quadrupeln etc. Punkt-$(r+1)$-tupeln construiren kann, deren Punkte jedesmal unter einander in Bezug auf eine bestimmte M^2_{r-1} des Büschels conjugirt sind und so, dass dabei eine projective Beziehung unter den i-tupeln und den M^2_{r-1} entsteht, so kann man jede Curve zur Construction einer Transformation nach §11. III. 3. verwenden und diese Transformationen bilden eine endliche Gruppe. Mit dieser kann dann die Collineationsgruppe aus 3. componirt werden.

5. Eine allgemeine Methode besteht darin, dass man die M^n_{r-1}, welche durch $C_1^{\frac{n-1}{2}}$, $C_2^{\frac{n-1}{2}}$ S', ... S gehen, und deren lineares System durch die sämmtlichen Transformationen der Gruppe invariant sein wird, als Abbildungssystem einer M_r des $R_{r'}$, $r' > r$, verwendet. *Die Gruppe erscheint dann als Abbildung einer endlichen Gruppe von collinearen Verwandlungen unter den Punkten einer M_r des $R_{r'}$.*

V. *Die Gruppen mit drei (CC') und zwei S.* Wenn in der Gruppe eine zu S' in S, C' in C_2 in C äquivalente Transformation vorkommt, so sei sie auf diesen Typus reducirt. C', C'_1, C sind dann in einem Kegel, dessen Spitze, D, ein Doppelpunkt, mit S', S alineirt ist. Für alle weiteren Transformationen muss D invariant sein, auf der Geraden SS' also die Kreistheilungsgruppe entstehen. Keine dieser Transformationen darf also zu einer mit Characteristik des §3 äquivalent sein, da sonst der zweite Punkt S ein Doppelpunkt sein müsste. Die cubischen und biquadratischen Transformationen mit S' in S haben aber (vide Preisschrift III.) nicht den Index 12, während $S'S$ hier eine Folge in einer Projectivität des Index 12 ist, und sind übrigens auch nicht construirbar. Alle übrigen ferner sind auf diese reducirbar und auf Transformationen mit zwei C, deren Index nicht grösser als 4 ist. Es gilt also:

Theorem LIX.—Die Transformation S' in S, C' in C'_1 in C tritt mit keiner anderen Transformation über dieser Figur in eine endliche Gruppe ein, ausser mit ihren Wiederholungen.

Wenn eine mit dem Typus $(CC')(CC')$ 2., 3., 4., oder 5. Ordnung äquivalente Transformation vorhanden ist, kann ebenfalls bewiesen werden, dass die drei C durch dieselbe M^2_{r-3} gehen und in demselben Kegel enthalten sind, welcher seine Spitze in einem Doppelpunkte D auf der Geraden S_1S_2 besitzt und dessen Berührungsebenen aus S_1S_2 in den Punkten jener M^2_{r-3} berühren. Dann gibt es eine unendliche Gruppe von Collineationen, welche die drei C in sich transformiren und alle Punkte von S_1S_2 zu Doppelpunkten besitzen. Es gibt also auch Transformationen jeder der vorhandenen Characteristiken, wo die Ebenen durch S_1S_2 sämmtlich invariant sind. Dann hängt also die Construction der Gruppe von der Construction der genau analogen Gruppe in der Ebene ab, wo diese überdies drei convergente invariante Geraden besitzen muss. Auf S_1S_2 muss stets eine Kreistheilungsgruppe vorhanden sein und sollen zwei verschiedene Transformationen mit derselben Projectivität vorhanden sein, so muss es auch eine geben, welche auf S_1S_2 Identität besitzt, was nur eine Collineation sein kann. Daraus schliesse ich, *dass nur cyclische Gruppen* (in Verbindung mit der unendlichen Collineationengruppe) *construirt werden können.*

Es bliebe das Vorkommen von Transformationen 3., 4. Ordnung mit $(S_2'S_2'')$ oder $(S_3'S_3'')$ zu untersuchen. Der 2. Fall wird wie V. in §11 behandelt und führt wie der 1. Fall zu dem Resultate, dass nur Gruppen mit (SS') möglich sind.

Die übrigen Gruppen sind solche, welche nur Transformationen enthalten, die einer Collineation oder der Transformation (C_1C_1'), S' in S, innerhalb der Figur äquivalent gemacht werden können. Aber auch hieraus kann bewiesen werden, dass die Figur dieselbe wie bei Th. LIX ist und die Construction also von jener der analogen ebenen Gruppe abhängig wird.

INNSBRUCK, *September* 1895.

Tactical Memoranda I-III.

By Eliakim Hastings Moore, *of Chicago.*

Introduction.

Cayley* has divided Algebra into Tactic and Logistic. A tactical entity of a finite number (m) of letters $a_1 \ldots . a_m$ I call an *arrangement of degree* m. Every arrangement of degree m determines a substitution-group on the m letters G^m under which it is invariant. Two arrangements of the same degree which differ only by the notation of their letters belong to the same *class* of arrangements.

Under the general heading *Tactical Memoranda* I shall publish a series of papers on certain more or less closely connected topics of Tactic.

I.

The General Tactical Configuration: Definition and Notation.

The technical term *configuration* was introduced—into projective geometry of the plane and of space—by Mr. Reye in his "Geometrie der Lage," second edition, vol. 1, p. 4, 1876, as stated in his memoir, "Das Problem der Configurationen" (Acta Mathematica, vol. 1, pp. 92–96, 1882). Particular geometric configurations, occurring in the plane, in space, or, in general in flat space of n dimensions, have been investigated by (among others) Messrs. De Vries, Jung, S. Kantor, Klein, Martinetti, Reye, Schoenflies, Segre, and Veronese. I have however come across no explicit formulation of the definition of the general geometric configuration occurring in flat space of n dimensions. As soon as one undertakes to construct such a formulation, he comes inevitably to the definition and matrix-notation to be at once given. *This matrix-notation should*

* Cayley, "On the Notion and Boundaries of Algebra" (Quarterly Journal of Mathematics, vol. 6, 1864; "Collected Mathematical Papers," vol. 5 [347]).

then be accepted as the definitive general notation for geometric configurations, while, of course, as heretofore, for particular investigations, other particular notations may be found satisfactory.

Definition of and notation for the general tactical configuration of rank n.

We have at disposal n sets of objects (letters), a_1 in the first set, a_2 in the second set, and, in general, a_i in the ith set; we denote these objects by

$$\lambda_{ij^{(i)}} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots . n \\ j^{(i)} = 1, 2, \ldots . a_i \end{pmatrix}$$

where the first suffix picks out the set to which the object belongs, and the second picks out the object in that set.

We have at disposal further a certain relation—call it *incidence**—between certain objects of *different* sets, so that we can say that $\lambda_{i_1 j_1}$ is or is not incident with $\lambda_{i_2 j_2}$ $(i_1 \neq i_2)$. We tabulate these incidences occurring in the system of objects in a *table of incidences* of which one line is

$$\lambda_{i_1 j_1} [\lambda_{i_1 j_1'}, \lambda_{i_1 j_1''}, \ldots . \lambda_{i_1 j_1^{k}} \ldots .],$$

which is read, $\lambda_{i_1 j_1}$ is incident with $\lambda_{i_1 j_1^{k}}$ $(k = 1, 2, \ldots .)$.

This table of incidences, when arranged so as to show also the distribution of the objects into the n sets, furnishes the complete tactical definition of our system of n sets of objects subject to the otherwise undefined incidence-relation.

This system is called a *tactical configuration of rank n*, if for every g, h $(g \neq h)$ every object of the set g is incident with the same number, say a_{gh}, of objects of the set h. I inscribe the fundamental numbers a_i, a_{gh} of a configuration of rank n in the square *matrix-symbol*

$$(a_{gh}) \qquad \begin{matrix} (g, h = 1, 2 \ldots . n) \\ (a_{gg} = a_g) \end{matrix}$$

which symbol serves likewise as *the notation* for the configuration. The gth element of the principal diagonal of the matrix $a_{gg} = a_g$ is the number of objects of the gth set. For an element a_{gh} $(g \neq h)$ not on the principal diagonal, the matrix is read *in by the line* (g) *and out by the column* (h), thus—Every object of the gth set is incident with a_{gh} objects of the hth set.

The *group of the configuration* is the totality of substitutions leaving the configuration invariant, that is, permuting amongst themselves the (objects)

* The term *incidence* is technical, having in general tactical theory no closer definition. The sequel will make this point of view clearer.

letters of every same set and leaving invariant the table of incidences of the configuration. This group has the degree $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, say a, and will be denoted by G^a_{Cf}. The group G^a_{Cf} is intransitive, and is isomorphic with the n groups $G^{a_i}_{Cf}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ on the letters of the several sets; the substitutions of G^a_{Cf} quâ substitutions on the a_i letters $\lambda_{ij(i)}$ of set i are the substitutions (perhaps with repetitions) of the $G^{a_i}_{Cf}$. Those configurations will be of most interest whose groups are of most interest. It is convenient* to transfer many terms from the abstract and the substitution group theories to the configuration theory; e. g. the Cf is l-ply transitive on the letters of set i if the $G^{a_i}_{Cf}$ is l-ply transitive.

Particular types of configurations are reached by *particularizing the incidence-relation.* We may for instance postulate that the incidence-relation shall be (a) *reciprocal* and (b) *partly transitive*, that is, (a) whenever $\lambda_{i_1 j_1}$ is incident with $\lambda_{i_2 j_2}$, then $\lambda_{i_2 j_2}$ is incident with $\lambda_{i_1 j_1}$; (b) there is a certain (open) succession of the n sets which, by a proper choice of the notation, we take to be the succession $i = 1, 2, \ldots n$, such that whenever $\lambda_{i_1 j_1}$ is incident with $\lambda_{i_2 j_2}$ and $\lambda_{i_2 j_2}$ in its turn is incident with $\lambda_{i_3 j_3}$ where either $i_1 > i_2 > i_3$ or $i_1 < i_2 < i_3$, then $\lambda_{i_1 j_1}$ is incident with $\lambda_{i_3 j_3}$. We then reach a general type of configurations which includes all geometrical configurations (at least as ordinarily treated) and which we therefore call the *geometrico-tactical* configurations. Of course we reach the geometric configurations proper—of rank n—by identifying the objects of the set i with geometric flat spaces of $i - 1$ dimensions R_{i-1} lying in flat space of n dimensions R_n, and identifying the incidence-relation with the geometric incidence (the relation of *containing or being contained in*), which fulfils the postulates (a), (b). Obviously by postulating the properties (a) and (b) separately, and the latter indeed in either or both of its two forms, we reach more general types of configurations than the geometrico-tactical type.

I have elsewhere† indicated certain so-called linear configurations of rank n (any integer) which will serve as interesting examples of geometrico-tactical configurations.

---

*Mr. Schoenflies, in his memoir "Ueber die regelmässigen Configurationen n_3" (Mathematische Annalen, vol. 31, pp. 43-69, 1888), calls (loc. cit., p. 44) a geometric configuration *regular* whose group is transitive on the *Cf-points.* It is, however, always desirable not to introduce new terms if without confusion old terms can be employed in new senses suggested naturally by the old senses.

†Moore, "Concerning Jordan's Linear Groups" (Bulletin of the American Mathematical Society, November, 1895).

II.

TACTICAL SYSTEMS

$$S[k, l, m],\ S\{k, l, m\},\ SGS[k, l, m],\ SGS\{k, l, m\},$$
$$S[\underset{\cdot}{k}, l, m],\ S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\},\qquad \textit{and}\qquad SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}.$$

1. *Introductory definitions.* We deal with m distinct letters $a_1 \ldots . a_m$. A $\underset{\cdot}{k}$-ad is a combination of k of the m letters $[a_{i_1} \ldots . a_{i_k}]$, the order being immaterial. A $\underset{\cdot}{k}$-id is an arrangement of k of the m letters in a definite order $\{a_{i_1} \ldots . a_{i_k}\}$. In a $\underset{\cdot}{k}$-ad (or $\underset{\cdot}{k}$-id) the k letters may or may not be distinct. A k-ad (or k-id) is a $\underset{\cdot}{k}$-ad (or $\underset{\cdot}{k}$-id) with k distinct letters. In m letters there are altogether m_k* k-ids, m_k $\underset{\cdot}{k}$-ids, m_k/k_k k-ads, and m_k^+/k_k^+† $\underset{\cdot}{k}$-ads.

If the m elements were (instead of letters) m distinct *positions*, similar definitions would hold for the *positional* k-ad, k-id. [We do not now need the positional $\underset{\cdot}{k}$-ad, $\underset{\cdot}{k}$-id.]

If from a $\underset{\cdot}{k}$-ad we select, without regard to order, certain l letters ($l \leqq k$), taking no letter oftener than it occurs in the $\underset{\cdot}{k}$-ad, we have an $\underset{\cdot}{l}$-ad. A $\underset{\cdot}{k}$-ad and an $\underset{\cdot}{l}$-ad so related are called *incident* each to the other. An $\underset{\cdot}{l}$-ad incident to each of two $\underset{\cdot}{k}$-ads is *common* to the two $\underset{\cdot}{k}$-ads.

If from a $\underset{\cdot}{k}$-id we select in order certain l letters ($l \leqq k$) from distinct positions on the face of the $\underset{\cdot}{k}$-id, we have an $\underset{\cdot}{l}$-id, and say that the $\underset{\cdot}{l}$-id is *incident* with the $\underset{\cdot}{k}$-id and *occupies* a certain *l-idic position on the face of the $\underset{\cdot}{k}$-id.* A $\underset{\cdot}{k}$-id has k_l incident $\underset{\cdot}{l}$-ids; a k-id has k_l *distinct* incident l-ids. An $\underset{\cdot}{l}$-id incident to each of two $\underset{\cdot}{k}$-ids and occupying corresponding l-idic positions on their faces is *common* to the two $\underset{\cdot}{k}$-ids.

2. $S[k, l, m]$. *A k-adic system*‡ *of index l in m letters* $S[k, l, m]$ ($m \geqq k \geqq l$) is an arrangement of the m letters in k-ads in such a way that every l-ad of the m letters is incident with one and only one k-ad of the system $S[k, l, m]$. The *characters* k, l, m are the *class* k, the *index* l and the *degree* m of the $S[k, l, m]$.

---

*r being a positive integer, the notations n_r, n_r^+ are thus defined:

$$n_r = n(n-1) \ldots . (n-r+1),$$
$$n_r^+ = n(n+1) \ldots . (n+r-1).$$

†Smith's "Treatise on Algebra," 1st ed., p. 284.

‡The overburdened term *system* is retained because the *notion* $S[k, l, m]$ is a generalization of the well-known notion, *triple system* $\Delta_m \equiv S[3, 2, m]$.

A $S[m, l, m]$ is simply one m-ad. A $S[k, k, m]$ is simply the totality of k-ads of m letters. A $S[k, 1, m]$ exists for and only for $m = k\nu$. A $S[k, 1, k\nu]$ is an arrangement of the $k\nu$ letters in ν k-ads.

3. $S\{k, l, m\}$. *A k-idic system of index l in m letters* $S\{k, l, m\}$ $(m \geqq k \geqq l)$ is an arrangement of the m letters in k-ids in such a way that every l-id of the m letters appears on the faces of the k-ids of the system $S\{k, l, m\}$ k_l times, occupying every possible position once and only once. A $S\{k, k, m\}$ is simply the totality of k-ids of m letters. There is but one $S\{m, m-1, m\}$, viz., the $S\{m, m, m\}$.

4. *Theorems concerning a* $S[k, l, m]$.

(a). The number of k-ads in a $S[k, l, m]$ is m_l/k_l.

(b). If in a $S[k, l, m]$ we suppress all k-ads not containing a certain g-ad $(g < l)$ and then everywhere in the remaining k-ads suppress that g-ad, we have a $S[k-g, l-g, m-g]$ containing (a) $(m-g)_{l-g}/(k-g)_{l-g}$ $(k-g)$-ads.

(c). If the positive integers k, l, m $(m > k > l)$ are characters of a $S[k, l, m]$, then the l expressions

$$\frac{(m-g)_{l-g}}{(k-g)_{l-g}} = \frac{(m-l+1)_h^+}{(k-l+1)_h^+} \quad (g+h=l) \quad \begin{matrix}(g=0, 1, \ldots . l-1)\\(h=1, 2, \ldots . l)\end{matrix}$$

are positive integers (a, b). (These conditions are satisfied at once if $m = k$ or if $k = l$.)

(d). Setting $m - l = \mu$ and $k - l = d$, the form of $m = \mu + l$ with respect to $k = l + d$ and l, where the k, l, m satisfy the conditions (c), viz. that $\mu > d > 0$ and that the l expressions

$$(\mu+1)_h^+/(d+1)_h^+ \qquad (h = 1, 2, \ldots . l)$$

are positive integers, depends upon the form of μ with respect to the primes entering the l integers $d+1, d+2, \ldots . d+l = k$.

(e). A general (but not exhaustive)* solution of the conditions (c) or (d) is the following, depending on the theory of the distribution of multiples of a prime in a succession of consecutive positive integers:

Let p_i $(i = 1, 2, \ldots . r)$ be the primes $\leqq d$ and q_j $(j = 1, 2, \ldots . s)$ be the primes $\geqq d+1, \leqq d+l = k$. Determine the exponents e_i $(i = 1, 2, \ldots . r)$ by

* Compare in the sequel, §8 c.

the inequalities $p_i^{e_i-1} < d+1 \leqq p_i^{e_i}$ (whence $p_i^{e_i} \leqq d^2$). Determine for every prime p_i a set of numbers π_{it} $(t = 1, 2, \ldots . e_i)$ thus: π_{it} is the smallest integer $\geqq d+1$ which is divisible by p_i^t (so that $\pi_{it} \leqq \pi_{ie_i} = p_i^{e_i} \leqq d^2$).

Then $m = \mu + l$ satisfies for given l and $k = l + d$ $(d \geqq 0)$ the conditions (c) or (d) if $\mu\,(\mu > d)$ is modulo M congruent to no one of the integers $0, 1, 2, \ldots . d-1$, where M is in turn every one of the integers $\pi_{it}\binom{t=1, 2, \ldots . e_i}{i=1, 2, \ldots . r}$, $q_j\,(j = 1, 2, \ldots . s)$, except however those π_{it} which exceed $k = l + d$. (There are no such excepted π_{it} if $k = l + d \geqq d^2$.)

(e′). These conditions (e) as regards the primes q are *necessary*.

(f). The solution (e) is for $d = 1$ and for $d = 2$ exhaustive.

($f_{d=1}$). The conditions (c) or (d) on $m = \mu + l$, l and $k = l + 1$ are satisfied if and only if μ is relatively prime to $Q = \prod_{j=1}^{s} q_j$, or, what is the same thing, to $k!$. There are thus $\phi(Q)$ forms* of $m = \mu + l$ (modulo Q).

($f_{d=2}$). The conditions (c) or (d) on $m = \mu + l$, l and $k = l + 2$ are satisfied if and only if $\mu \not\equiv 0, 1$ (mod. M) where M is in turn 4 and every prime q of the series $3, 4, \ldots . k$.

(g). Every $S[k, l, m]$ contains (many) $S[k-g, l-g, m-g]$ $(g = 1, 2, \ldots . l-1)$ (b). A $S[k, l, m]$ not lying thus in any including $S[k+1, l+1, m+1]$—and hence not thus in any including $S[k+f, l+f, m+f]$ $(f = 1, 2, \ldots .)$—is called a *maximum* $S[k, l, m]$. Every $S[k+f, l+f, m+f]$ $(f = 0, 1, \ldots .)$ containing a given $S[k, l, m]$, for which latter system the product $\mu_d = \mu(\mu-1) \ldots . (\mu-d+1)$ $(\mu = m-l,\ d = k-l)$, contains a prime $q' \geqq d+1$, and hence (e′) $q' > k$ has its $f < k - q'$ (e′). Hence follows for every such existing $S[k, l, m]$ the *existence* of at least one containing *maximum* $S[k+f, l+f, m+f]$ $(0 \leqq f < k - q')$.

(h). *Every* $S[k, l, m]$ *may be looked at as a configuration*† *of rank* k. The objects of the ith Cf-set $(i = 1, 2, \ldots . k)$ are the i-ads entering the k-ads of the $S[k, l, m]$.

---

*To specialize for triple systems $\Delta_m \equiv S[3, 2, m] \equiv S[k, l, m]$; $m = \mu + 2$, $\mu \equiv 1, 5$ (mod. 6), $\therefore$ $m = 6\mu' + 1$ or $6\mu' + 3$, which is as it should be.

†That every triple system $\Delta_m \equiv S[3, 2, m]$ may be looked at as a configuration $Cf\begin{pmatrix} m & \frac{1}{2}(m-1) \\ 3 & \frac{1}{6}m(m-1) \end{pmatrix}$ was noted by Mr. De Vries, "Zur Theorie der Tripelsysteme" (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 8, pp. 222–226, 1894).

(i). $(m-l)/(k-l)$ being an integer, $(m-l)/(k-l)$ $S[k, l, m]$, no two of whose k-ads have an $(l+1)$-ad in common, taken together constitute a $S[k, l+1, m]$.

5. *Theorems concerning a* $S\{k, l, m\}$.

(a). In m letters there are in all m_l l-ids. There are in all k_l l-idic positions on the face of a k-id. Every k-id has thus k_l distinct incident l-ids, and every l-id is incident with k_l distinct k-ids. Thus the $S\{k, l, m\}$ contains certain m_l k-ids connected with the (totality of) m_l l-ids by a configuration

$$\begin{pmatrix} m_l & k_l \\ k_l & m_l \end{pmatrix}.$$

(b). If in a $S\{k, l, m\}$ we suppress all k-ids not containing a certain g-id $(g<l)$ in a certain position and then everywhere in the remaining k-ids suppress that g-id, we have a $S\{k-g, l-g, m-g\}$. Hence arises (as in §4 g) the notion: *maximum* $S\{k, l, m\}$.

(c). If in a $S\{k, l, m\}$ we suppress in every k-id the g-id $(g \leqq k-l)$ occupying a certain g-idic position on the face of the k-id, we have left a $S\{k-g, l, m\}$.

(d). The process (c) gives us, if $k \geqq 2l$, $g \geqq l$, $\therefore$ $k-g \geqq l$, two systems $S\{k-g, l, m\}$, $S\{g, l, m\}$ with an interesting 1—1 correspondence between the $(k-g)$-ids of one and the g-ids of the other.

(e). The process (c) gives us, if $g<l$ and $g \leqq k-l$, a $S\{k-g, l, m\}$ containing m^g $S\{k-g, l-g, m-g\}$.

(f). $m-l$ $S\{k, l, m\}$, no two of whose k-ids have an $(l+1)$-id in common, taken together constitute a $S\{k, l+1, m\}$.

6. $SGS[k, l, m]$. *A k-adic school-girl-system* of index l in m letters* $SGS[k, l, m]$ $(m \geqq k \geqq l)$ is a k-adic system of index l in m letters $S[k, l, m]$ whose m_l/k_l k-ads are collected into sets $((s_1))$, every k-ad entering one and only one set s_1, and every set s_1 containing in its k-ads every one of the m letters, i. e.

* This arrangement is a generalization of the *fifteen-school-girls* arrangement $SGS[3, 2, 15]$. See for instance Cayley, "On a Tactical Theorem relating to the Triads of Fifteen Things" (Collected Mathematical Papers, vol. 5 [328]); Power, "On the Problem of the Fifteen School-girls" (Quarterly Journal of Mathematics, vol. 8, 1867).

every 1-ad of the m letters once and only once, and then these sets $((s_1))$ are similarly collected into sets $((s_2))$, every set s_1 entering one and only one set s_2, and every set s_2 containing in its k-ads every 2-ad of the m letters, and so on, ..., in general, the sets $((s_{g-1}))$ $(g = 1, 2, \ldots . l)$ are similarly collected into sets $((s_g))$, every set s_{g-1} entering one and only one set s_g, and every set s_g containing in its k-ads every g-ad of the m letters once and only once. Obviously the k-ads play the rôle of sets $((s_0))$ and the $S[k, l, m]$ that of *the single* set s_l. Every set s_g $(g = 1, 2, \ldots . l)$ is a $SGS[k, g, m]$. There is no distinction of order in the sets s_{g-1} lying in the same set s_g. A $S[m, l, m]$ is at once a $SGS[m, l, m]$. A $S[k, 1, m = k\nu]$ is at once a $SGS[k, 1, k\nu]$. The same $S[k, l, m]$ may underlie a number of different $SGS[k, l, m]$.

7. $SGS\{k, l, m\}$. *A k-idic school-girl-system of index l in m letters* $SGS\{k, l, m\}$ $(m \geqq k \geqq l)$ is a k-idic system of index l in m letters $S\{k, l, m\}$ whose m_l/k_l k-ids are collected into sets $((s_1))$, every k-id entering one and only one set s_1, and every set s_1 containing in its k-ids every one of the m letters, i. e. every 1-id of the m letters once and only once in every position, and then these sets $((s_1))$ are similarly collected into sets $((s_2))$, every set s_1 entering one and only one set s_2, and every set s_2 containing in its k-ids every 2-id of the m letters once and only once in every position, and so on, ..., and in general, the sets $((s_{g-1}))$ $(g = 1, 2, \ldots . l)$ are similarly collected into sets $((s_g))$, every set s_{g-1} entering one and only one set s_g, and every set s_g containing in its k-ids every g-id of the m letters once and only once in every position. Obviously the k-ids play the rôle of sets $((s_0))$ and the $SGS\{k, l, m\}$ that of *the single* set s_l. Every set s_g is a $SGS\{k, g, m\}$. The same $S\{k, l, m\}$ may underlie a number of different $SGS\{k, l, m\}$. Every $SGS\{m, m-1, m\}$ is also a $SGS\{m, m, m\}$.

8. *Theorems concerning a* $SGS[k, l, m]$.

(a). Every set s_g $(g = 0, 1, \ldots . l)$ of a $SGS[k, l, m]$ contains m_g/k_g k-ads. Every set s_h $(h > g)$ contains $(m_h/k_h) \div (m_h/k_h) = (m-g)_{h-g}/(k-g)_{h-g}$ sets s_g. The $SGS[k, l, m]$ contains $(m-g)_{l-g}/(k-g)_{l-g}$ sets s_g.

(b). Every set s_{g+1} contains $(m_{g+1}/k_{g+1}) \div (m_g/k_g) = (m-g)/(k-g)$ sets s_g $(g = 0, 1, \ldots . l-1)$.

(c). If the positive integers k, l, m $(m > k \geqq l)$ are the characters of a $SGS[k, l, m]$, then the l expressions

$$(m-g)/(k-g) \qquad (g = 0, 1, \ldots . l-1)$$

are positive integers greater than 1, that is, m has the form*

$$m = k(M\nu + 1),$$

where kM is the least common multiple of the l integers $k, k-1, \ldots . k-l+1$, and where ν is a positive integer. Of course we have here another† general (but not exhaustive) solution of the conditions of §4 c.

(d). If in a $SGS[k, l, m]$ we suppress all k-ads not containing a certain g-ad $(g < l)$ and then everywhere in the remaining k-ads suppress that g-ad, we have a $SGS[k-g, l-g, m-g]$, every set s_{f+g} $(f = 1, 2, \ldots . l-g)$ of the original system yielding a set s_f of the new system.

(e). Every $SGS[k, l, m]$ contains (many) $SGS[k-g, l-g, m-g]$ $(g = 1, 2, \ldots . l-1)$ (d). A $SGS[k, l, m]$ not lying thus in any including $SGS[k+1, l+1, m+1]$—and hence not thus in any including $SGS[k+f, l+f, m+f]$ $(f = 1, 2, \ldots .)$—is called a *maximum* $SGS[k, l, m]$. Every existent $SGS[k, l, m]$ lies in at least one including *maximum* $SGS[k+f, l+f, m+f]$, whose f satisfies the conditions $0 \leq f \leq f'$, where $k+1+f'$ $(f' \geq 0)$ is the smallest integer greater than k which is not a divisor of $m-k$ (c).

(f). The $SGS[k, l, m]$ is a geometrico-tactical configuration of rank $l+1$. The $a_g = a_{gg}$ objects of set g $(g = 0, 1, \ldots . l)$ are the $a_g = a_{gg} = (m-g)_{l-g}/(k-g)_{l-g}$ sets s_g. The fundamental numbers

$$a_{gh} (g, h = 0, 1, \ldots . l;\ g \neq h)$$

are $$(g < h)\ \ a_{gh} = 1;\ (g > h)\ \ a_{gh} = (m-h)_{g-h}/(k-h)_{g-h}.$$

(g). $(m-l)/(k-l)$ being an integer, $(m-l)/(k-l)$ $SGS[k, l, m]$, no two of whose k-ads have an $(l+1)$-ad in common, taken together constitute a $SGS[k, l+1, m]$.

9. *Theorems concerning a* $SGS\{k, l, m\}$.

(a). Every set s_g $(g = 0, 1, \ldots . l)$ of a $SGS\{k, l, m\}$ is a $S\{k, g, m\}$ and (§5 a) contains m_g k-ids. Every set s_h $(h > g)$ contains $m_h/m_g = (m-g)_{h-g}$ sets s_g. The $SGS\{k, l, m\}$ contains $(m-g)_{l-g}$ sets s_g.

(b). Every set s_{g+1} contains $m_{g+1}/m_g = m-g$ sets s_g $(g = 0, 1, \ldots . l)$.

---

* These expressions $(m-g)/(k-g)$ have at once each the value 1 if $m = k$. The form $m = k(M\nu+1)$ holds then for all cases $m \geq k \geq l$ if we take $\nu \geq 0$.

† Compare §4 e.

(c). The $SGS\{k, l, m\}$ is a geometrico-tactical configuration of rank $l+1$. The $a_g = a_{gg}$ objects of set g $(g = 0, 1, \ldots . l)$ are the $a_g = a_{gg} = (m-g)_{l-g}$ sets s_g. The fundamental numbers a_{gh} $(g, h = 0, 1, \ldots . l;\ g \neq h)$ are

$$(g < h)\ \ a_{gh} = 1\,;\ (g > h)\ \ a_{gh} = (m-h)_{g-h}.$$

(d). If in a $SGS\{k, l, m\}$ we suppress all k-ids not containing a certain g-id $(g < l)$ in a certain position and then everywhere in the remaining k-ids suppress that g-id, we have a $SGS\{k-g,\ l-g,\ m-g\}$, every set s_{f+g} $(f = 1, 2, \ldots . l-g)$ of the original system yielding a set s_f of the new system. Hence arises (as in §8 e) the notion: *maximum* $SGS\{k, l, m\}$.

(e, f, g, h). Theorems e, f, g, h for the $SGS\{k, l, m\}$ are analogues of theorems §5 c, d, e, f for the $S\{k, l, m\}$.

10. *Examples of* $SGS[k, l, m]$—*and so of* $S[k, l, m]$.

(a). $SGS[3, 2, 15]$. See the references above to papers on the original school-girl problem.

(b). $SGS[2, 2, 4]$: $[b_0 b_1][b_2 b_3]$, $[b_0 b_2][b_3 b_1]$, $[b_0 b_3][b_1 b_2]$. There is but one $SGS[2, 2, 4]$.

(c). $SGS[2, 2, 6]$: symbol $\infty.01234$ (which is to be thought of graphically as a regular pentagon 01234 and its center ∞). The six letters are $b_\infty b_0 b_1 b_2 b_3 b_4$, or writing merely the indices $\infty 01234$. One set s_1 of three duads of the $SGS[2, 2, 6]$ is $[\infty 0][14][23]$. From this, by the cyclic substitution on five indices (01234), we have in all five sets s_1. This $SGS[2, 2, 6]$ has a substitution-group G^6_{120} generated by the substitutions $(\infty)(01234)$, $(\infty)(0)(14)(23)$, $(\infty)(0)(1243)$, $(\infty 0)(14)(2)(3)$—(which may well be thought graphically on the symbol given for the $SGS[2, 2, 6]$)—which is the well-known G^6_{120} of degree 6 and of order 120, holoedrically isomorphic with the symmetric substitution-group on five letters $G^5_{5!}$. There are six such $SGS[2, 2, 6]$ conjugate under the symmetric $G^6_{6!}$. Every existent $SGS[2, 2, 6]$ belongs to this class of six.

(d). $SGS[2, 2, 8]$. Mr. Noether, in §1 of his memoir, "Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung" (Mathematische Annalen, vol. 15, pp. 89–110, 1879), sets out to make an exhaustive determination of all $SGS[2, 2, 8]$.

(e). $SGS[3, 2, 9]$. The nine letters b_{ij} are given by their indices ij $(i, j = 0, 1, 2)$. The symbol

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 02 \\ 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{matrix}$$

implies that the $SGS[3, 2, 9]$ consists of the following four sets s_1 of three triads each:

$$\begin{matrix} [00\ 01\ 02][10\ 11\ 12][20\ 21\ 22], \\ [00\ 10\ 20][01\ 11\ 21][02\ 12\ 22], \\ [00\ 11\ 22][01\ 12\ 20][02\ 10\ 21], \\ [00\ 12\ 21][01\ 10\ 22][02\ 10\ 21]. \end{matrix}$$

This $SGS[3, 2, 9]$ defines the only existent class of $SGS[3, 2, 9]$. It occurs geometrically in the inflection-point configuration of a plane cubic curve. It occurs also in group-theory* as a particular case $(p = 3)$ of the more general system (f).

(f). $SGS[p, 2, p^n]$(p a prime, n a positive integer), connected with the Abelian or commutative group G_{p^n} determined by n generators $A_1 \ldots . A_n$, each of period p. The p^n letters $b_{i_1 i_2 \ldots . i_n}$ of the $SGS[p, 2, p^n]$ denote the p^n elements $A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots . A_n^{i_n}$ of the G_{p^n}, where the n indices or exponents $i_1 \ldots . i_n$ are integers taken modulo p. Every cyclic sub-group G_p determines one p-ad of the $SGS[p, 2, p^n]$, and indeed—when the G_{p^n} is written as a rectangular array with respect to this G_p as a sub-group—a set s_1 of p-ads of the $SGS[p, 2, p^n]$. (f) is a particular case $(n' = 1)$ of the more general system (g).

(g). $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$(p a prime, n, n' positive integers).

The $SGS[p, 2, p^n]$ (f) depends in the way explained upon the *abstract* Abelian group G_{p^n}. When, however, it is studied from the standpoint of a certain *concrete* Abelian G_{p^n}, viz. the Galois-field† of order p^n $GF[p^n]$ quâ additive-group, it is seen to depend upon the $GF[p^n]$ and its included $GF[p^1]$. Generalizing, we find the $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$ (g) as similarly dependent upon the $GF[p^{nn'}]$ and its included $GF[p^{n'}]$.

This $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$ has a transitive group on the $p^{nn'}$ letters which contains a cyclic substitution leaving (any) one letter fixed and permuting in one

*My colleague, Mr. Bolza, first used this group-theoretic point of view in obtaining the arrangement (f) for $p = 2$.

†For references to the Galois-field literature, see my paper cited at close of I.

cycle all the remaining $p^{nn'}-1$ letters. One such cyclic substitution is determined by any primitive root γ of the $GF[p^{nn'}]$. The $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$ contains $(p^{nn'}-1)/(p^{n'}-1)$ sets s_1. The first $(p^{nn'}-1)/(p^{n'}-1)$ applications of the cyclic substitution connected with γ permute these sets s_1 cyclically in a certain order.

In §4 of my paper referred to above (at close of I), I have tabulated the $SGS[p, 2, p^n]$, for the cases $p^n = 2^2, 3^2,$* $5^2, 7^2, 11^2$; $2^3, 3^3, 5^3, 7^3$; $2^4, 3^4, 5^4$; 2^5; 2^6, as the defining element of the corresponding linear configuration $LCf[p^n]$.

As examples of the $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$ with $n' > 1$, I give now two with $n' = 2$:

$SGS[4, 2, 16]$. The $GF[2^4]$ has a primitive root γ where $\gamma^4 = 1 + \gamma$; the $2^4 = 16$ marks are $0 = *, \gamma^i$ $(i = 0 \ldots . 14)$. We denote the letters of the $SGS[4, 2, 16]$ by the 16 indices $*\ 01 \ldots . 14$. One set s_1 of four 4-ads is

$$[*\ 0\ 5\ 10][1\ 2\ 4\ 8][6\ 7\ 9\ 13][11\ 12\ 14\ 3],$$

from which the five sets s_1 come by use of the cyclic substitution $(*)(01 \ldots . 14)$.

$SGS[4, 2, 64]$. The $GF[2^6]$ has the primitive root γ where $\gamma^6 = 1 + \gamma + \gamma^3 + \gamma^4$. We use the index notation $*\ 01 \ldots . 62$. The twenty-one sets s_1 come by the cyclic substitution $(*)(01 \ldots . 62)$ from the following set of sixteen 4-ads:

$$[*\ 0\ 21\ 42]$$
$$[1\ 25\ 56\ 58][2\ 50\ 49\ 53][3\ 13\ 20\ 57][6\ 26\ 40\ 51][12\ 52\ 17\ 39]$$
$$[22\ 46\ 14\ 16][23\ 8\ 7\ 11][24\ 34\ 41\ 15][27\ 47\ 61\ 9][33\ 10\ 38\ 60]$$
$$[43\ 4\ 35\ 37][44\ 29\ 28\ 32][45\ 55\ 62\ 36][48\ 5\ 19\ 30][54\ 31\ 59\ 18].$$

(h). $SGS[4, 2, m = 3p + 1 = 12\nu + 4]$, where p is any prime of the form $p = 4\nu + 1$. This arrangement is given below (III 6).

(i). A $SGS[k, k, m]$ has the element of interest that in it every k-ad of the m letters appears. We have seen above (f) an example: $SGS[2, 2, 2^n]$. Mr. Sylvester gives† a $SGS[3, 3, 9]$, and states that he has a general $SGS[3, 3, 3^n]$.

---

* For the $SGS[8, 2, 9]$ (e) if we write the symbol thus:

$$\begin{matrix} * & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{matrix}$$

then one cyclic substitution is (*)(01234567).

† Sylvester, "Note on a Nine School-girls Problem" (Messenger of Mathematics, vol. 22, pp. 159–160, p. 192, 1893).

11. *Examples of* $S\{k, l, m\}$ *and* $SGS\{k, l, m\}$.

(a). $S\{m, l, m\}$. For every *exactly* l-ply transitive substitution-group $G^m_{m_l}$ of degree m and of order m_l we have an interesting $S\{m, l, m\}$ consisting of the m_l m-ids derived from any initial m-id by the substitutions of the $G^m_{m_l}$. Mr. Jordan* has studied the totality of such groups $G^m_{m_l}$, and separated them into the following systems:

(α). $m = m$, $l = m - 1$ or m. The symmetric $G^m_{m!}$.

(β). $m = m$, $l = m - 2$. The alternating $G^m_{\frac{1}{2}m!}$.

(γ). $m = p^n + 1$, $l = 3$. } p is any prime; n is any integer.

(δ). $m = p^n$, $l = 2$. } Mathieu† has given such groups.

(ε). $m = 12$, $l = 5$. Mathieu's‡ $G^{12}_{12_5}$.

(ζ). $m = 11$, $l = 4$. Mathieu's‡ $G^{11}_{11_4}$.

(η). $m = m$, $l = 1$. The *regular forms* G^m_m of all group G_m of order m.

(b). $SGS\{m, l, m\}$. If the $G^m_{m_l}$ of (a) has a succession of sub-groups $G^m_{m_g}$ $(g = 1, \ldots . l)$, the $G^m_{m_g}$ being (for every g) exactly g-ply transitive and a sub-group of the $G^m_{m_{g+1}}$, then the $G^m_{m_l}$ may be exhibited as a rectangular array, first with respect to the G^m_m, and then the lines of this array as a rectangular array with respect to the $G^m_{m_2}$, and so on. Correspondingly the $S\{m, l, m\}$ is exhibited as a $SGS\{m, l, m\}$.

But do any of the groups $G^m_{m_l}$ (a) contain such a series of sub-groups $G^m_{m_g}$?

(aη). This case is trivial. Every $S\{k, 1, m\}$ is a $SGS\{k, 1, m\}$.

(aζ). The $G^{12}_{12_5}$ has no such series, since there is no $G^{12}_{12_4}$.

(aε). The $G^{11}_{11_4}$ has no such series, since there is no $G^{11}_{11_3}$.

(aδ). Every $G^{p^n}_{(p^n)_2}$ has such a series, since it contains§ a (self-conjugate) transitive $G^{p^n}_{p^n}$.

(aγ). A $G^m_{m_2}$ $(m = p^n + 1)$ contains a $G^m_{m_2}$ if at all only when

(aγ)$_1$. $m = p^n + 1 = 3$, $m - 1 = 2$. The $G^3_{3_2}$ is the symmetric $G^3_{3!}$; see (aα)$_1$.

(aγ)$_2$. $m = p^n + 1 = 4$, $m - 2 = 2$. The $G^4_{4_2}$ is the symmetric $G^4_{4!}$; see (aα)$_2$.

(aγ)$_3$. $m = p^n + 1 = p'^{n'}$. If the $G^m_{m_2}$ does contain a doubly-transitive $G^m_{m_2}$,

---

* Jordan, "Recherches sur les substitutions" (Journal de Mathématiques, ser. 2, vol. 17, pp. 351–367, 1872).

† Mathieu, "Mémoire sur le nombre de valeurs . . . " (ibid., ser. 2, vol. 5, pp. 9–42, 1860), p. 38. In §15 (1) I exhibit Mathieu's group (δ).

‡ Mathieu, "Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, . . . " (ibid., ser. 2, vol. 6, pp. 241–323, 1861), p. 270.

§ Jordan, loc. cit., p. 356, §10.

then the latter will contain a simply transitive $G^m_{m_1}$ (aδ), and so the $G^m_{m_1}$ has the series $G^m_{m_2}$, $G^m_{m_2}$, $G^m_{m_1}$. The type $(a\gamma)_3$ contains the types $(a\gamma)_1$ and $(a\gamma)_2$.

(aβ). The alternating $G^m_{m_{m-2}}$ $(m \geq 4)$ contains a $G^m_{m_{m-3}}$ if at all only when

$(a\beta)_1$. $m - 3 = 1$; $m = 4$. The $G^4_{4_2}$ is the alternating G^4_{12} (aβ) and likewise the only $G^{2^2}_{(2^2)_2}$ (aδ); it contains the (self-conjugate) transitive four-group G^4_4, and so has the series $G^4_{4_2}$, $G^4_{4_1}$.

$(a\beta)_2$. $m - 3 = 2$; $m = p^n = 5$. The alternating $G^5_{5_2}$ is the icosahedron G_{60}, and contains no sub-group G_{20}. The $G^5_{5_2}$ has then no series $G^5_{5_2}$, $G^5_{5_2}$, $G^5_{5_1}$. (The $G^5_{5_2}$ (aδ) is the metacyclic G^5_{20}; half its substitutions are odd.)

$(a\beta)_3$. $m - 3 = 3$; $m = p^n + 1 = 6$. The alternating $G^6_{6_4}$ contains no transitive sub-group G^6_6, and hence no series $G^6_{6_4}$, $G^6_{6_3}$, $G^6_{6_2}$, $G^6_{6_1}$. (The $G^6_{6_3}$ (aγ) has half its substitutions odd.)

(aα). The symmetric $G^m_{m_{m-1}}$ $(m \geq 3)$ contains always the alternating $G^m_{m_{m-2}}$, and contains a series $G^m_{m_g}$ $(g = 1 \ldots . l)$ in and only in the two cases

$(a\alpha)_1$. $m = 3$. The symmetric $G^3_{3_2}$ contains the cyclic G^3_3.

$(a\alpha)_2$. $m = 4$. The symmetric $G^4_{4_3}$ contains the alternating $G^4_{4_2}$ and this the four-group G^4_4.

Thus the only $G^m_{m_l}$ $(l > 1)$ containing a series of $G^m_{m_g}$ $(g = 1 \ldots . l)$ are the symmetric $G^4_{4_3}$, $G^3_{3_2}$ and the alternating $G^4_{4_2}$, and all doubly-transitive $G^m_{m_2}$ $(m = p^n)$, and certain exceptional $(a\gamma)_3$ triply-transitive $G^m_{m_3}$ $(m = p^n + 1 = p'^{n'})$. Each of these yields a $SGS\{m, l, m\}$. The $G^3_{3_2}$, $G^4_{4_3}$, $G^4_{4_2}$ yield (c) (d) (e).

(c). $SGS\{3, 2, 3\} \equiv SGS\{3, 3, 3\}$. $\{abc\}\{bca\}\{cab\}$, $\{acb\}\{bac\}\{cba\}$. There is but one $SGS\{3, 2, 3\}$.

(d). $SGS\{4, 2, 4\}$.

$$\{abcd\}\{badc\}\{cdab\}\{dcba\},$$
$$\{acdb\}\{bdca\}\{cabd\}\{dbac\},$$
$$\{adbc\}\{bcad\}\{cbda\}\{dacb\}.$$

(e). $SGS\{4, 3, 4\} \equiv SGS\{4, 4, 4\}$. To the $SGS\{4, 2, 4\}$ of (d) adjoin the $SGS\{4, 2, 4\}$ obtained therefrom by the substitution (cd).

12. $S[\underset{\bullet}{k}, l, m]$, $S\{\underset{\bullet}{k}, l, m\}$ and $SGS\{\underset{\bullet}{k}, l, m\}$; $(k \geq l)$. The definition of one of these $\underset{\bullet}{k}$-adic ($\underset{\bullet}{k}$-idic) systems differs from the definition of its corresponding k-adic (k-idic) system only by the substitution throughout for the term g-ad (g-id) of the term $\underset{\bullet}{g}$-ad ($\underset{\bullet}{g}$-id). *It is important to note that the remark $m \geq k$ is now removed,* since in a $\underset{\bullet}{k}$-ad ($\underset{\bullet}{k}$-id) repetitions are allowed. Since only for $g = 1$

is *every* $\underset{\cdot}{g}$-ad ($\underset{\cdot}{g}$-id) likewise a g-ad (g-id), one of these $\underset{\cdot}{k}$-adic ($\underset{\cdot}{k}$-idic) systems may perhaps coincide with its corresponding k-adic (k-idic) system only in the trivial case $l=1$. (It is easy to see that the $SGS[\underset{\cdot}{k}, l, m]$ with $l>1$ is non-existent, while for $l=1$ it is merely a $S[\underset{\cdot}{k}, 1, m]$.)

A $S[\underset{\cdot}{k}, k, m]$ ($S\{\underset{\cdot}{k}, k, m\}$) is simply the totality of $\underset{\cdot}{k}$-ads ($\underset{\cdot}{k}$-ids) of the m letters, and contains the $S[k, k, m]$ ($S\{k, k, m\}$).

13. *Theorems concerning* $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$, $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$, $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$.

(a). In m letters there are in all m^l $\underset{\cdot}{l}$-ids. On the face of every $\underset{\cdot}{k}$-id there are k_l l-idic positions. The $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ contains m^l $\underset{\cdot}{k}$-ids.

(b). Every set s_g of a $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ is a $SGS\{\underset{\cdot}{k}, g, m\}$ and contains m^g $\underset{\cdot}{k}$-ids. Every set s_h $(h>g)$ contains m^{h-g} sets s_g. The $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ contains m^{l-g} sets s_g. Every $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ is thus a configuration.

(c). If in a $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$ ($S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$) we suppress all $\underset{\cdot}{k}$-ads ($\underset{\cdot}{k}$-ids) not containing a certain $\underset{\cdot}{g}$-ad ($\underset{\cdot}{g}$-id in a certain position) $(g<l)$, and then in the remaining $\underset{\cdot}{k}$-ads ($\underset{\cdot}{k}$-ids) suppress that $\underset{\cdot}{g}$-ad ($\underset{\cdot}{g}$-id), we have a $S[k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m]$ ($S\{k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m\}$).

(d). If in (c) the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ is a $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$, then the resulting $S\{k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m\}$ is a $SGS\{k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m\}$.

(e). From (c) (d) arise (as in §§4, 5, 8, 9) the notions: *maximum* $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$, $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$, $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$.

(f). If in a $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ ($SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$) we suppress in every $\underset{\cdot}{k}$-id the $\underset{\cdot}{g}$-id $(g \leqq k-l)$ occupying a certain g-idic position on the face of the $\underset{\cdot}{k}$-id, we have left a $S\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$ ($SGS\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$).

(g). The process (f) gives us, if $k \geqq 2l$, $g \geqq l$, $\therefore k-g \geqq l$, two systems $S\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$, $S\{\underset{\cdot}{g}, l, m\}$, ($SGS\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$, $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$) with an interesting 1—1 correspondence between the $(k \underset{\cdot}{-} g)$-ids of one and the $\underset{\cdot}{g}$-ids of the other.

(h). The process (f) gives us, if $g<l$ and $g \leqq k-l$, a system $S\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$ ($SGS\{k \underset{\cdot}{-} g, l, m\}$) containing (c, d) $m^g S\{k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m\}$ ($SGS\{k \underset{\cdot}{-} g, l-g, m\}$).

(i). m $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ ($SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$, no two of whose $\underset{\cdot}{k}$-ids have an $(l+1)$-id in common, taken together constitute a $S\{\underset{\cdot}{k}, l+1, m\}$ ($SGS\{\underset{\cdot}{k}, l+1, m\}$).

14. *Examples of* $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$.

(a). $S[\underset{\cdot}{k}, k-1, m]$ (k, m any integers). The k letters $a_{i_1} a_{i_2} \ldots . a_{i_k}$ con-

stitute a $\underset{\cdot}{k}$-ad when and only when

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_k \equiv 0 \pmod{m}.$$

(b).* $S[\underset{\cdot}{k}, 2, m]$. If to the k-ads of a $S[k, 2, m]$ we adjoin the m $\underset{\cdot}{k}$-adic sequences $[a_i a_i \ldots a_i]$ $(i = 1, \ldots m)$ we have a $S[\underset{\cdot}{k}, 2, , m]$.

(c). $S[\underset{\cdot}{3}, 2, m]$. Complete table of all classes for $m = 1, 2, 3, 4$:

$S[\underset{\cdot}{3}, 2, 1]$. (1) $[aaa]$.

$S[\underset{\cdot}{3}, 2, 2]$. (1) $[aaa]$ $[abb]$.

$S[\underset{\cdot}{3}, 2, 3]$. (1) $[aaa]$ $[abc]$ $[bbb]$ $[ccc]$.

(2) $[aab]$ $[acc]$ $[bbc]$.

$S[\underset{\cdot}{3}, 2, 4]$. (1) $[aaa]$ $[abb]$ $[acc]$ $[add]$ $[bcd]$.

(2) $[aaa]$ $[abb]$ $[acd]$ $[bcc]$ $[bdd]$.

The case $S[\underset{\cdot}{3}, 2, 3]$ illustrates the fact that in a $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$ the number of $\underset{\cdot}{k}$-ads depends not only on the characters (k, l, m) but also on the internal structure of the $S[\underset{\cdot}{k}, l, m]$.

15. *Examples of* $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ *and* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$.

(a). $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 2\}$. $\{aa\}\{bb\}$, $\{ab\}\{ba\}$. There is no other $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 2\}$.

(b). $S\{\underset{\cdot}{3}, 2, 2\}$. $\{aaa\}$ $\{abb\}$ $\{bab\}$ $\{bba\}$. There is but one class of $S\{\underset{\cdot}{3}, 2, 2\}$. There is no $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 2\}$, and hence no $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, 2\}$ $(k \geq l \geq 2)$ except the $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 2\}$ (a).

(c). $S\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$ $(SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\})$. Every $S\{k, 2, m\}$ $(SGS\{k, 2, m\})$ may be at once extended to a $S\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$ $(SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\})$ by adjoining the m $\underset{\cdot}{k}$-idic sequences $\{a_i a_i \ldots a_i\}$ $(i = 1, \ldots m)$. (These form the mth $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 1, m\}$ of the $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$).

(c′). Whenever a $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ $(SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\})$ contains a $S\{k, l, m\}$ $(SGS\{k, l, m\})$, no $\underset{\cdot}{k}$-id containing a repeated letter contains more than $l - 1$ distinct letters.

(d). $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 3\}$. There are exactly two $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 3\}$; they are not equivalent. The matricular arrangement

$$\begin{matrix} \{aa\}\{bb\}\{cc\} \\ \{bc\}\{ca\}\{ab\} \\ \{cb\}\{ac\}\{ba\} \end{matrix}$$

read by rows gives one system, and by columns the other system.

* This $S[\underset{\cdot}{k}, 2, m]$ for $k = 3$ was of much use in my construction of triple systems $S[3, 2, m]$ for all permissible values of m, $m = 6\mu' + 1$, $6\mu' + 3$: "Concerning Triple Systems" (Mathematische Annalen, vol. 43, pp. 271-285, 1893).

(e). $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$. The matricular arrangement (d), which exhibits the nine $\underset{\cdot}{2}$-ids in two ways as a $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 3\}$, may at once be extended to a $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$ by affixing a letter to every $\underset{\cdot}{2}$-id, the $\underset{\cdot}{2}$-ids of the same column (or row) receiving the same letter, the three columns (or rows) receiving the three letters a, b, c in any order. The affixed letter is to occupy any the same position in every resulting $\underset{\cdot}{3}$-id.

(e′). $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$. Every $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ $(k > l > 1)$ may be derived in the way indicated in (e) from a matricular arrangement exhibiting $m^2\, SGS\{k \underset{\cdot}{-} 1, l - 2, m\}$—(where in case $l = 2$ a $SGS\{k \underset{\cdot}{-} 1, 0, m\}$ means a $(k \underset{\cdot}{-} 1)$-id)—in two ways as a $SGS\{k \underset{\cdot}{-} 1, l, m\}$. (Compare §13 f.)

(f). $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$ with the property that every set $s_1 \equiv SGS\{\underset{\cdot}{3}, 1, 3\}$ is invariant under the substitution (abc). By (e′, d) every such $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$ arises by *prefixing* the letters a, b, c or b, c, a or c, a, b to the $\underset{\cdot}{2}$-ids of the respective columns of the arrangement (d). There are then three such $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$. The first forms a class by itself; the last two are equivalent.

(g). $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 3, 3\}$. The three $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 3\}$ of (f) constitute a $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 3, 3\}$.

(h). $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$. The $SGS\{4, 2, 4\}$ of §11 d whose sets $s_1 \equiv SGS\{4, 1, 4\}$ are separately invariant under the four-group G_4^4, yields a similar $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$ by adjoining as fourth set s_1 the four sequences $\{aaaa\} \ldots \{dddd\}$ (c).

(i). Two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 4\}$. We seek ultimately (k) a $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 4, 4\}$ whose sets $s_1 \equiv SGS\{\underset{\cdot}{4}, 1, 4\}$ are separately invariant under the G_4^4, and, from the $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$ (h) by dropping in every $\underset{\cdot}{4}$-id the first position by the process (e′), obtain the matricular arrangement—two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 4\}$—

$$\begin{array}{cccc}
\{aaa\} & \{bbb\} & \{ccc\} & \{ddd\} \\
\{bcd\} & \{adc\} & \{dab\} & \{cba\} \\
\{cdb\} & \{dca\} & \{abd\} & \{bac\} \\
\{dbc\} & \{cad\} & \{bda\} & \{acb\}.
\end{array}$$

(j). Two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 4\}$. By dropping any position in the $\underset{\cdot}{3}$-ids of the two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 4\}$ (i) we obtain a two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{2}, 2, 4\}$. The three arrangements so obtained are identical, except as to arrangement of the rows.

(i). The twelve positional-columns of the $SGS\{\underset{\cdot}{3}, 2, 4\}$ (i) are derived from the first by the G_{12}^4. The three positional-columns of the first column of $\underset{\cdot}{3}$-ids are by pairs conjugate under the G_{12}^4 but not under the G_4^4. Any two

ordered positional-columns, conjugate under the G^4_{12} but not under the G^4_4, determine a column of $\underset{\bullet}{2}$-ids differing only in literal notation and in order from the first column of the arrangement (j), and (since the G^4_4 is self-conjugate under the G^4_{12}), this column of $\underset{\bullet}{2}$-ids determines a two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, 4\}$. Hence *any* three ordered positional-columns by pairs conjugate under the G^4_{12} but not under the G^4_4, determine a column of $\underset{\bullet}{3}$-ids which by the G^4_4 leads to a two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 2, 4\}$.

From the two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 2, 4\}$ (i) we obtain, by applying the substitutions of the G^4_4 simultaneously and independently to the several positional-columns, in all sixteen two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 2, 4\}$. (We may leave say the first-position letters unchanged.) Any row is derived from its initial $\underset{\bullet}{3}$-id by the G^4_4. Any row is sufficiently specified by its initial $\underset{\bullet}{3}$-id, and any two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 2, 4\}$ arrangement by its initial column of $\underset{\bullet}{3}$-ids. Obviously every $\underset{\bullet}{3}$-id in the four letters appears once in every line and once in every column somewhere in these sixteen arrangements. By prefixing an a, b, c, d to every $\underset{\bullet}{3}$-id of the first, second, third, fourth column respectively, we have then the 4^4 $\underset{\bullet}{4}$-ids of the four letters arranged by rows in 4^3 sets $s_1 \equiv SGS\{\underset{\bullet}{4}, 1, 4\}$ (separately invariant under the G^4_4), and these by fours in 4^2 sets $s_2 \equiv SGS\{\underset{\bullet}{4}, 2, 4\}$ (by the theory of (e')). Denoting these 4^2 $SGS\{\underset{\bullet}{4}, 2, 4\}$ by their respective first columns, I group them by fours in 4 sets $s_3 \equiv SGS\{\underset{\bullet}{4}, 3, 4\}$ and have thus a

(k). $SGS\{\underset{\bullet}{4}, 4, 4\}$ with sets $s_1 \equiv SGS\{\underset{\bullet}{4}, 1, 4\}$ separately invariant under the G^4_4:

$\{aaaa\}$	$\{aabb\}$	$\{aacc\}$	$\{aadd\}$
$\{abcd\}$	$\{abdc\}$	$\{abab\}$	$\{abba\}$
$\{acdb\}$	$\{acca\}$	$\{acbd\}$	$\{acac\}$
$\{adbc\}$	$\{adad\}$	$\{adda\}$	$\{adcb\}$;

$\{abbb\}$	$\{abaa\}$	$\{abdd\}$	$\{abcc\}$
$\{aadc\}$	$\{aacd\}$	$\{aaba\}$	$\{aaab\}$
$\{adca\}$	$\{addb\}$	$\{adac\}$	$\{adbd\}$
$\{acad\}$	$\{acbc\}$	$\{accb\}$	$\{acda\}$;

$\{accc\}$	$\{acdd\}$	$\{acaa\}$	$\{acbb\}$
$\{adab\}$	$\{adba\}$	$\{adcd\}$	$\{addc\}$
$\{aabd\}$	$\{aaac\}$	$\{aadb\}$	$\{aaca\}$
$\{abda\}$	$\{abcb\}$	$\{abbc\}$	$\{abad\}$;

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\{addd\} & \{adcc\} & \{adbb\} & \{adaa\} \\
\{acba\} & \{acab\} & \{acdc\} & \{accd\} \\
\{abac\} & \{abbd\} & \{abca\} & \{abdb\} \\
\{aacb\} & \{aada\} & \{aaad\} & \{aabc\}.
\end{array}$$

It will be noticed that the four columns of each row come out of the first one by simultaneous application to the third- and fourth-positional columns of the (same) substitutions of the G_4^4, and the four rows come out of the first one by simultaneous application to the second-, third-, and fourth-positional columns of the (same) substitutions of the G_4^4.

That every row above is a $SGS\{\underset{\bullet}{4}, 3, 4\}$ follows (first) for a $\underset{\bullet}{3}$-id, one of whose letters is in the first position on the $\underset{\bullet}{4}$-id in accordance with the theory of (e′) and the remarks above, and (second) for a $\underset{\bullet}{3}$-id occupying the positions second, third, and fourth on the $\underset{\bullet}{4}$-id, because, when the first-position letters are everywhere suppressed, the four rows are identical (e. g. the $\{aaa\}$ comes in the $s_1 \equiv SGS\{\underset{\bullet}{4}, 1, 4\}$ containing the $\{aaaa\}$, $\{abbb\}$, $\{accc\}$, $\{addd\}$, and so each constitutes a $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, 4\}$.

(l). Two-fold $SGS\{m \underset{\bullet}{-} 1, 2, m\}$ ($m = p^n$, p any prime; $m > 2$). This arrangement is a direct generalization of the two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 2, 4\}$ (i). We use Mathieu's exactly doubly transitive $G_{m_2}^m$ (§11 aδ). The $m = p^n$ letters are the p^n marks ξ of the Galois-field $GF[p^n]$. The substitutions of the $G_{m_2}^m$ given analytically are

$$\xi' = \alpha\xi + \beta, \qquad (\alpha \neq 0)$$

where β is any mark and α any mark except 0 of the $GF[p^n]$. The G_m^m,

$$\xi' = \xi + \beta, \qquad (\beta \text{ any mark})$$

is self-conjugate in the $G_{m_2}^m$.

From any initial m-id $\{\xi_1, \xi_2 \ldots . \xi_m\}$ we obtain by the $G_{m_2}^m$ in all $m_2 = m(m-1)$ m-ids; these are conjugate under the $G_{m_2}^m$. They are in sets of m conjugate under the G_m^m; the m substitutions $\xi' = \alpha\xi + \beta$, with α fixed and β arbitrary, give such a set of m m-ids.

The two-fold $SGS\{m \underset{\bullet}{-} 1, 2, m\}$ to be constructed is a matricular arrangement $\{s_{ij}\}$ ($i, j = 1 \ldots . m$) whose elements s_{ij} are $(m \underset{\bullet}{-} 1)$-ids,

$$s_{ij} = \{\xi_{ij1} \ldots . \xi_{ijk} \ldots . \xi_{ij\,m-1}\}.$$

We take any $(m-1)$-id $\{\alpha_1 \ldots . \alpha_{m-1}\}$ of the $m-1$ marks $\xi \neq 0$, any $(m \underset{\bullet}{-} 1)$-id

$\{\beta_1 \ldots . \beta_{m-1}\}$, and any two m-ids $\{\gamma_1 \ldots . \gamma_m\}$, $\{\xi_1 \ldots . \xi_m\}$ of the m marks ξ, and set

$$\xi_{ijk} = \alpha_k \xi_i + \beta_k + \gamma_j. \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1 \ldots . m \\ k \quad = 1 \ldots . m-1 \end{pmatrix}$$

That this arrangement $\{s_{ij}\}$ is in fact a two-fold $SGS\{m-1, 2, m\}$ may be easily verified analytically.

(m). $SGS\{\underset{\cdot}{m}, 2, m\}$ $(m = p^n)$. From the arrangement (l) by the process used in (e), we obtain a $SGS\{\underset{\cdot}{m}, 2, m\}$. [For $m = 2$ see (a)].

(n). Two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$ $(2 \leq k \leq m-1, m = p^n)$. We apply the process of §13 f to the arrangement (l).

(o). $SGS\{\underset{\cdot}{p}, p, p\}$ (p any prime); $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, p\}$ $(p \geq k \geq l)$. This $SGS\{\underset{\cdot}{p}, p, p\}$ is connected with the Abelian or commutative group G_{p^p} determined by p generators $A_1 \ldots . A_p$, each of period p and a certain succession of sub-groups G_{p^g} $(g = 1, 2 \ldots . p-1)$ having as *first* property this, that the G_{p^g} lies in the $G_{p^{g+1}}$ $(g = 1 \ldots . p-2)$. Now we arrange the p^p elements of the G_{p^p} with respect to the G_{p^1} by p's in p^{p-1} sets s_1, and these p^{p-1} sets s_1 with respect to the G_{p^2} by p's in p^{p-2} sets s_2, ... and these p^{p-g} sets s_g with respect to the $G_{p^{g+1}}$ by p's in p^{p-g-1} sets s_{g+1}, ... and these p^2 sets s_{p-2} with respect to the $G_{p^{p-1}}$ by p's in p sets s_{p-1}; the individual elements play the rôle of p^p sets s_o, and the totality of p^p elements plays the rôle of the one set s_p.

We define the succession of sub-groups G_{p^g} $(g = 1 \ldots . p-1)$ by a succession of $p-1$ independent generators B_g $(g = 1 \ldots . p-1)$,

$$B_g = A_1^{e_{g1}} \ldots . A^{e_{gi}} \ldots . A_p^{e_{gp}};$$

the G_{p^h} has the generators $B_1 \ldots . B_h$.

We work with p letters $a_0 a_1 \ldots . a_{p-1}$ or say a_f where the f's are integers taken modulo p. We associate with every element $A_1^{e_1} \ldots . A_i^{e_i} \ldots . A_p^{e_p} = A_{e_1 \ldots e_i \ldots e_p}$ of the G_{p^p} a corresponding $\underset{\cdot}{p}$-id $\{a_{e_1} \ldots . a_{e_i} \ldots . a_{e_p}\}$ or say $\{e_1 \ldots . e_i \ldots . e_p\}$ or say $\{\{e_i\}\}$ in the p letters. The arrangement of the elements leads to this arrangement of the $\underset{\cdot}{p}$-ids:

Any particular $\underset{\cdot}{p}$-id $\{\{e_i'\}\}$ lies in and determines the set s_h of p^h $\underset{\cdot}{p}$-ids $\{\{e_i\}\}$

$$e_i = e_i' + \sum_{g=1}^{g=h} m_g e_{gi}, \qquad (i = 1 \ldots . p)$$

where the $m_1 \ldots . m_h$ run independently over the integers $0, 1, \ldots . p-1$.

Now such a set s_h is a $S\{p, h, p\}$ if it contains in its p^h p-ids $\{\{e_i\}\}$ every h-id of the p letters once and only once in every position, that is, analytically, if the rectangular array

$$E_h \equiv (e_{gi}) \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . h \\ i = 1 \ldots . p \end{pmatrix}$$

has no determinant of order h which vanishes. If the $p-1$ arrays E_h $(h = 1 \ldots . p-1)$ have every one this property, then our arrangement of p^p p-ids in p letters is a $SGS\{p, p, p\}$. This is the *second* property which the succession of $p-1$ sub-groups G_{p^g} $(g = 1 \ldots . p-1)$ must possess (not indeed absolutely in the G_{p^p}, but) relatively to the p chosen generators $A_1 \ldots . A_p$ of the G_{p^p}.

The Pascal arithmetical triangle when taken in the form

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924
.....						
.....						

furnishes us in an interesting way with an effective rectangular array (e_{gi}) $\begin{pmatrix} g = 1 \ldots . p-1 \\ i = 1 \ldots . p \end{pmatrix}$ *for every prime* p. If we denote the elements of the triangle by u_{gi} $(g, i = 1, 2, 3 \ldots .)$, we take simply

$$e_{gi} \equiv u_{gi} \pmod{p}. \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . p-1 \\ i = 1 \ldots . p \end{pmatrix}$$

We have

$$u_{gi} = \frac{(g+i-2)!}{(g-1)!\,(i-1)!} = \frac{(g+i-2)_{g-1}}{(g-1)!}, \qquad (u_{g1} = u_{1i} = 1)$$

so that $e_{gi} \equiv u_{gi} \equiv 0 \pmod{p}$ whenever $g + i - 2 \geqq p$. [The arrays (e_{gi}) for $p = 3, 5, 7$ are indicated in the triangle.] The array is indeed effective: the

determinant $|u_{gi}|$ $\begin{pmatrix} g = 1 \ldots . h \\ i = i_1 \ldots . i_h ; \ i_f \leq p \end{pmatrix}$ of any order $h (\leq p - 1)$ lying in the first h rows and in any h of the first p columns is evaluated* by the formula

$$\prod_{g=2}^{g=h} (g-1)! \, . \, |u_{gi}| = |i^{g-1}| = \prod_{f_1 > f_2} (i_{f_1} - i_{f_2}), \qquad \begin{pmatrix} g, f_1, f_2 = 1 \ldots . h \\ i = i_1 \ldots . i_h ; \ i_f \leq p \end{pmatrix}$$

so that indeed

$$|e_{gi}| \equiv |u_{gi}| \not\equiv 0 \pmod{p}. \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . h \\ i = i_1 \ldots . i_h ; \ i_f \leq p \end{pmatrix}$$

Instead of making use of the Pascal triangle u_{gi} $(g, i = 1, 2, 3 \ldots .)$ we might use the system v_{gi} $(g, i = 1, 2 \ldots .)$,

$$v_{gi} = i^{g-1}, \ v_{1i} = 1 .$$

The triangle however has certain advantages.

From every $SGS(\underset{\cdot}{p}, p, p)$ by the definition we have (many) $SGS\{\underset{\cdot}{p}, l, p\}$ $(l \leq p)$, and from every $SGS\{\underset{\cdot}{p}, l, p\}$, by the process of §13 f (many) $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, p\}$ $(l \leq k \leq p)$.

(p). $SGS\{\underset{\cdot}{m}, m, m\}$ $(m = p^n$, p any prime, n any integer); $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}$ $(m = p^n \geq k \geq l)$. This $SGS\{\underset{\cdot}{p^n}, p^n, p^n\}$ is a direct analytic generalization of the $SGS\{\underset{\cdot}{p}, p, p\}$ (o).

We work with $m = p^n$ letters a_ξ where ξ is a mark of the Galois-field $GF[p^n]$, and have at once the $S\{\underset{\cdot}{m}, m, m\}$ of (all) m^m $\underset{\cdot}{m}$-ids $\{a_{\xi_1} \ldots . a_{\xi_i} \ldots . a_{\xi_m}\}$ or say $\{\xi_1 \ldots . \xi_i \ldots . \xi_m\}$ or say $\{\{\xi_i\}\}$. We have at disposal a rectangular array

$$E = (\varepsilon_{gi}), \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . m-1 \\ i = 1 \ldots . m \end{pmatrix}$$

where the ε_{gi} are marks of the $GF[p^n]$ and where no determinant

$$|\varepsilon_{gi}| \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . h \\ i = i_1 \ldots . i_h ; \ i_f \leq m \end{pmatrix}$$

vanishes. Then to exhibit our $S\{\underset{\cdot}{m}, m, m\}$ as a $SGS\{\underset{\cdot}{m}, m, m\}$ we let any particular $\underset{\cdot}{m}$-id $\{\{\xi_i'\}\}$ lie in and determine the set s_h of m^h $\underset{\cdot}{m}$-ids $\{\{\xi_i\}\}$,

$$\xi_i = \xi_i' + \sum_{g=1}^{g=} \mu_g \, \varepsilon_{gi}, \qquad (i = 1 \ldots . m)$$

where the $\mu_1 \ldots . \mu_h$ run independently over the m marks of the $GF[m = p^n]$.

* Scott's Determinants, p. 116, §4; Baltzer's Determinanten, 5th ed., p. 87, §8 I.

An effective array $E = (\varepsilon_{gi})$ is this one:

$$\varepsilon_{gi} = \varepsilon_i^{g-1};\ \varepsilon_{1i} = 1, \qquad \begin{pmatrix} g = 1 \ldots . m-1 \\ i = 1 \ldots . m \end{pmatrix}$$

where $\{\{\varepsilon_i\}\}$ is any m-id of the m marks ξ, for we have

$$|\varepsilon_{gi}| = |\varepsilon_i^{g-1}| = \prod_{f_1 > f_2} (\varepsilon_{i_{f_1}} - \varepsilon_{i_{f_2}}) \neq 0. \qquad \begin{pmatrix} g, f_1, f_2 = 1 \ldots . h \\ i = i_1 \ldots . i_h;\ i_f \leq m \end{pmatrix}$$

16. *Composition theorems.*

(a). *Given a* $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(a)}$ *in the* m *letters* $a_i (i = 1 \ldots . m)$ *and a* $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(b)}$ *in the* n *letters* $b_j (j = 1 \ldots . n)$: *to construct a* $S\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$ *in the* mn *letters* $c_{ij} \begin{pmatrix} i = 1 \ldots . m \\ j = 1 \ldots . n \end{pmatrix}$.

Two $\underset{\cdot}{k}$-ids $\{a_{i_1} \ldots . a_{i_f} \ldots . a_{i_k}\}\{b_{j_1} \ldots . b_{j_f} \ldots . b_{j_k}\}$ *compound* uniquely into a $\underset{\cdot}{k}$-id $\{c_{i_1 j_1} \ldots . c_{i_f j_f} \ldots . c_{i_k j_k}\}$. The *composition* of the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(a)}$ and the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, n\}^{(b)}$ into a $S\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$ is at once effected by compounding every $\underset{\cdot}{k}$-id of the first system with every $\underset{\cdot}{k}$-id of the second system.

(b). *Given a* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(a)}$ *and a* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, n\}^{(b)}$: *to construct a* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$.

We compound by (a) the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(a)}$ and the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, n\}^{(b)}$ into a $S\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$ and then exhibit this as a $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$. In fact every $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(c)}$ of the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$ lies in and determines a set $s_g^{(c)} \equiv S\{k, g, mn\}^{(c)}$ $(g = 1 \ldots . l)$: for the $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(c)}$ is compounded from a certain $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(a)}$ and a certain $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(b)}$; the $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(a)}$ lies in and determines a $s_g^{(a)} \equiv S\{\underset{\cdot}{k}, g, m\}^{(a)}$ of the $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, m\}^{(a)}$; the $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(b)}$ lies in and determines a $s_g^{(b)} \equiv S\{\underset{\cdot}{k}, g, n\}^{(b)}$ of the $SGS\{\underset{\cdot}{k}, l, n\}^{(b)}$; these $S\{\underset{\cdot}{k}, g, m\}^{(a)}$, $S\{\underset{\cdot}{k}, g, n\}^{(b)}$ compound within the $S\{\underset{\cdot}{k}, l, mn\}^{(c)}$ uniquely into a $S\{\underset{\cdot}{k}, g, mn\}^{(c)}$; this $S\{\underset{\cdot}{k}, g, mn\}^{(c)}$ is determined in this way by any $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(c)}$ lying in it.

(c). *Given a two-fold* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}^{(a)}\{s_{gh}^{(a)}\}$ $(g, h = 1 \ldots . m)$ *and a two-fold* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, n\}^{(b)}\{s_{ij}^{(b)}\}$ $(i, j = 1 \ldots . n)$: *to construct a two-fold* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, mn\}^{(c)}$ $\{s_{tu}^{(c)}\}$ $(t, u = 1 \ldots . mn)$.

We establish arbitrarily a 1—1 correspondence between the mn indices t and the mn pairs of indices g, i, and again arbitrarily a 1—1 correspondence between the mn indices u and the mn pairs of indices h, j. We compound the $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(a)}$ $s_{gh}^{(a)}$ and the $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(b)}$ $s_{ij}^{(b)}$ into a $\underset{\cdot}{k}$-id$^{(c)}$, say $s_{tu}^{(c)}$, where t corresponds to g, i, and u corresponds to h, j. The matricular arrangement $\{s_{tu}^{(c)}\}$ is then obviously a two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}^{(c)}$.

(d). *Given a* $S\{k, 2, m\}^{(a)}$ *and a* $S\{k, 2, n\}^{(b)}$: *to construct a* $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$.

We extend the two given k-idic systems to $S\{\underset{\bullet}{k}, 2, m\}^{(a)}$, $S\{\underset{\bullet}{k}, 2, n\}^{(b)}$(§15 c), and compound these two $\underset{\bullet}{k}$-idic systems into a $\underset{\bullet}{k}$-idic system $S\{\underset{\bullet}{k}, 2, mn\}^{(c)}$ (a). This $S\{\underset{\bullet}{k}, 2, mn\}^{(c)}$ contains besides the mn $\underset{\bullet}{k}$-idic sequences $\{c_{ij} \ldots c_{ij}\}\binom{i=1\ldots m}{j=1\ldots n}$, exactly the $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$ desired.

(e). *Given a* $SGS\{k, 2, m\}^{(a)}$ *and a* $SGS\{k, 2, n\}^{(b)}$: *to construct a* $SGS\{k, 2, mn\}^{(c)}$.

The $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$ of (d) may in this case be exhibited as a $SGS\{k, 2, mn\}^{(c)}$, since the mn sequences $\{c_{ij} \ldots . c_{ij}\}$ omitted constitute one set $s_1 \equiv S\{\underset{\bullet}{k}, 1, mn\}$ of the $SGS\{\underset{\bullet}{k}, 2, mn\}^{(c)}$ (b).

In III 12 I give a direct construction of a $SGS\{4, 2, 4^n\}$.

(f). *Given a* $S[k, l, m]^{(a)}$ *and a* $S\{k, l, k\}^{(b)}$: *to construct a* $S\{k, l, m\}^{(a)}$.

The $S[k, l, m]^{(a)}$ contains m_l/k_l k-ads$^{(a)}$. We take every k-ad$^{(a)}$ $[a_{i_1} \ldots a_{i_f} \ldots a_{i_k}]$, *each in any certain way* as a k-id$^{(a)}$ $\{a_{i_1} \ldots . a_{i_f} \ldots . a_{i_k}\}$. The k_l k-ids of the $S\{k, l, k\}^{(b)}$ are obtained from the k-id $\{b_1 \ldots . b_f \ldots . b_k\}$ by certain permutations j of the positions of the letters: $\{b_{j_1} \ldots . b_{j_f} \ldots . b_{j_k}\} = \{b_1 \ldots . b_f \ldots . b_k\}_j$. The position-permutation j changes $\{a_{i_1} \ldots . a_{i_f} \ldots . a_{i_k}\}$ into $\{a_{ij_1} \ldots . a_{ij_f} \ldots . a_{ij_k}\}$ $= \{a_{i_1} \ldots . a_{i_f} \ldots . a_{i_k}\}_j$. We obtain thus in all m_l k-ids$^{(a)}$; they constitute a $S\{k, l, m\}^{(a)}$.

We speak of the *compositions* of the k-ad $[a_{i_1} \ldots . a_{i_f} \ldots . a_{i_k}]$ and the k-id $\{b_{j_1} \ldots . b_{j_f} \ldots . b_{j_k}\}$ into the k-id $\{a_{ij_1} \ldots . a_{ij_f} \ldots . a_{ij_k}\}$ and of the $S[k, l, m]^{(a)}$ and the $S\{k, l, k\}^{(b)}$ into the $S\{k, l, m\}^{(a)}$. These composition-processes are obviously not unique.

(g). *Given a* $SGS[k, l, m]^{(a)}$ *and a* $SGS\{k, l, k\}^{(b)}$: *to construct a* $SGS\{k, l, m\}^{(a)}$.

We compound by (f) the $S[k, l, m]^{(a)}$ and the $S\{k, l, k\}^{(b)}$ into a $S\{k, l, m\}^{(a)}$ and then exhibit this as a $SGS\{k, l, m\}^{(a)}$. In fact every k-id$^{(a)}$ of the $S\{k, l, m\}^{(a)}$ lies in and determines a set $s_g^{(a)} \equiv S\{k, g, m\}^{(a)}$ $(g = 1 \ldots . l)$: for the k-id$^{(a)}$ of the $S\{k, l, m\}^{(a)}$ arises by composition of a certain k-ad$^{(a)}$ and a certain k-id$^{(b)}$; the k-ad$^{(a)}$ lies in and determines a $s_g^{(a)} \equiv S[k, g, m]^{(a)}$ of the $SGS[k, l, m]^{(a)}$; the k-id$^{(b)}$ lies in and determines a $s_g^{(b)} \equiv S\{k, g, k\}^{(b)}$ of the $SGS\{k, l, k\}^{(b)}$; these $S[k, g, m]^{(a)}$, $S\{k, g, k\}^{(b)}$ compound within the $S\{k, l, m\}^{(a)}$ uniquely into a $S\{k, g, m\}^{(a)}$; this $S\{k, g, m\}^{(a)}$ is determined in this way by any k-id$^{(a)}$ lying in it.

(h). *Given a* $S[k, 2, m]^{(a)}$ *and a* $S[k, 2, n]^{(b)}$ *and an exactly doubly transitive* $G^k_{k_2}$: *to construct a* $S[k, 2, mn]^{(c)}$ $(k = p^t$ (§11 a)).

The $G^k_{k_2}$ determines (§11 a) a $S\{k, 2, k\}^{(d)}$ whose k_2 position-permutations j (see f) form a group, viz. the $G^k_{k_2}$. We compound by (f) the $S[k, 2, m]^{(a)}$, $S\{k, 2, k\}^{(d)}$ into a $S\{k, 2, m\}^{(a)}$, and similarly compound the $S[k, 2, n]^{(b)}$, $S\{k, 2, k\}^{(d)}$ into a $S\{k, 2, n\}^{(b)}$. We compound by (d) the $S\{k, 2, m\}^{(a)}$, $S\{k, 2, n\}^{(b)}$ into a $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$. Any k-id$^{(c)}$ of this $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$ by the k_2 position-permutations j leads to k_2 k-ids$^{(c)}$; *since the* k_2 *position-permutations form a group*, these k_2 k-ids$^{(c)}$ are found in the $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$.

We may replace these k_2 k-ids$^{(c)}$ by one k-ad$^{(c)}$. The $S\{k, 2, mn\}^{(c)}$ becomes by this decomposition with respect to the $S\{k, 2, k\}^{(d)}$ (which is the reverse of the composition (f)) the $S[k, 2, mn]^{(c)}$ desired.

(i). *Given a* $SGS[k, 2, m]^{(a)}$ *and a* $SGS[k, 2, n]^{(b)}$ *and an exactly doubly transitive* $G^k_{k_2}$: *to construct a* $SGS[k, 2, mn]^{(c)}$ $(k = p^t$ (§11 a b)).

The $G^k_{k_2}$ determines (§11 b) a $SGS\{k, 2, k\}^{(d)}$. We obtain by (g) $SGS\{k, 2, m\}^{(a)}$, $SGS\{k, 2, n\}^{(b)}$, and then by (d) a $SGS\{k, 2, mn\}^{(c)}$, which, in view of the group-origin of the $SGS\{k, 2, k\}^{(d)}$, decomposes with respect to the $SGS\{k, 2, k\}^{(d)}$ into the $SGS[k, 2, mn]^{(c)}$ desired.

In III 12 I give a direct construction of a $SGS[4, 2, 4^n]$.

(j). *To construct a* $SGS\{k, 2, m\}$ *where* m *is any integer with the different primes* $p_1 \ldots . p_t$, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{h_i}$, *and where* k *is any integer subject only to the conditions* $k \leq p_i^h$ $(i = 1 \ldots . t)$, $k \geqq 2$.

We have by §11 b (aδ) $SGS\{p_i^{h_i}, 2, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by §9 e $SGS\{k, 2, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by composition (d) the $SGS\{k, 2, m\}$ desired.

I give a few other applications of the composition theorems (a . . . . i).

(k). *To construct a two-fold* $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$ *where* $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{h_i}$, *where* m *if divisible by* 2 *is divisible by* 4, *and where* k *is subject only to the conditions* $k \leq p_i^{h_i} - 1$ $(i = 1 \ldots . t)$, $k \geqq 2$.

We have by §15 l two-fold $SGS\{p_i^{h_i} - 1, 2, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by §13 f two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by composition (c) the two-fold $SGS\{\underset{\cdot}{k}, 2, m\}$ desired.

(l). *To construct a* $SGS\{\underset{\bullet}{k}, l, m\}$ *where* $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{h_i}$ *and where* k *and* l *are subject only to the conditions* $l \leq k \leq p_i^{h_i}$ $(i = 1 \ldots . t)$.

We have by §15 p $SGS\{\underset{\bullet}{p_i^{h_i}}, p_i^{h_i}, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by §13 d $SGS\{\underset{\bullet}{k}, k, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so (by the definition of a $SGS\{\underset{\bullet}{k'}, l', m'\}$) $SGS\{\underset{\bullet}{k}, l, p_i^{h_i}\}$ $(i = 1 \ldots . t)$, and so by composition (b) the $SGS\{\underset{\bullet}{k}, l, m\}$ desired.

(m). *Given a two-fold* $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, m\}^{(a)}\{s_{ij}^{(a)}\}$ *and a two-fold* $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, m\}^{(b)}\{t_{xy}^{(b)}\}$: *to construct a two-fold* $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, m\}^{(a)}$. [By (k) this gives us $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, m\}$ for m any integer ≥ 3 odd or evenly even.]

The two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, m\}^{(a)}\{s_{ij}^{(a)}\}$ is

$$s_{ij}^{(a)} = \{a_{f_{ij}} a_{g_{ij}}\}; \qquad (i, j = 1 \ldots . m)$$

the ith row α_i' is a $S\{\underset{\bullet}{2}, 1, m\}^{(a)}$, and likewise the jth column α_j''; hence each of the indices f_{ij}, g_{ij} effects for i fixed or for j fixed a substitution on the m indices $j = 1 \ldots . m$ or $i = 1 \ldots . m$; and further, every $\underset{\bullet}{2}$-id $\{a_f a_g\}$ appears once as an $s_{ij}^{(a)}$,

$$\{a_f a_g\} = s_{i_f j_f}^{(a)}. \qquad (f, g = 1 \ldots . m)$$

We make similar notations and remarks in connection with the two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, m\}^{(b)}\{t_{xy}^{(b)}\}$,

$$t_{xy}^{(b)} = \{b_{h_{xy}} b_{k_{xy}}\}, \ \{b_h b_k\} = t_{x_{hk} y_{hk}}^{(b)}. \quad (x, y; h, k = 1 \ldots . m)$$

Then the $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, m\}^{(a)}$ desired is the arrangement $\{u_{xyj}^{(a)}\}$ of m^3 $\underset{\bullet}{3}$-ids,

$$u_{xyj}^{(a)} = \{a_{f_{h_{xy}j}} a_{g_{h_{xy}j}} a_{k_{xy}}\}. \qquad (x, y, j = 1 \ldots . m)$$

We speak of the xth row and the yth column of this $\{u_{xyj}^{(a)}\}$. Writing $u_{xy*}^{(a)} = \{u_{xy1}^{(a)}, \ldots . u_{xyj}^{(a)}, \ldots . u_{xym}^{(a)}\} = \{\alpha_{h_{xy}}' a_{k_{xy}}\}$ we see that the $\{u_{xyj}^{(a)}\}$ results from a composition in a certain way of the given $\{s_{ij}^{(a)}\}$ $\{t_{xy}^{(b)}\}$. Obviously this composition can be effected in various ways distinct from but similar to the way chosen above.

Identifying the $\underset{\bullet}{3}$-id $u_{xyj}^{(a)}$ with the $\underset{\bullet}{3}$-id $\{a_c a_d a_e\}$,

$$c = f_{h_{xy}j}, \ d = g_{h_{xy}j}, \ e = k_{xy},$$

we find easily that of the six indices $cdexyj$ any three (except cdj and xye) with values given at will determine the remaining three uniquely.

Hence the m^3 $\underset{\bullet}{3}$-ids $u^{(a)}_{xyj}$ $(x, y, j = 1 \ldots m)$ form the $S\{\underset{\bullet}{3}, 3, m\}^{(a)}$ $u^{(a)}_{***} = \{u^{(a)}_{xyj}\}$. Further, the m $\underset{\bullet}{3}$-ids $u^{(a)}_{xyj}$ $(y = 1 \ldots m)$ form a $S\{\underset{\bullet}{3}, 1, m\}^{(a)}$ $u^{(a)}_{x*j}$, and the m^2 $\underset{\bullet}{3}$-ids $u^{(a)}_{xyj}$ $(y, j = 1 \ldots m)$, that is, the m $u^{(a)}_{x*j}$ $(j = 1 \ldots m)$ form a $S\{\underset{\bullet}{3}, 2, m\}^{(a)}$ $u^{(a)}_{x**}$, while the m $u^{(a)}_{x**}$ $(x = 1 \ldots m)$ form the $u^{(a)}_{***} = \{u^{(a)}_{xyj}\}$. Thus the $\{u^{(a)}_{xyj}\}$ is a $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, m\}^{(a)}$ in this way by rows, and also similarly by columns.

(n). Two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, 3\}$. The two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{2}, 2, 3\}$ of §15 d yields by proper application of (m) the following two arrangements $\{u_{xyj}\}$, each a two-fold $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, 3\}$:

aa	*a*	*bc*	*b*	*cb*	*c*	*aa*	*a*	*bb*	*b*	*cc*	*c*
bb		*ca*		*ac*		*bc*		*ca*		*ab*	
cc		*ab*		*ba*		*cb*		*ac*		*ba*	
bc	*c*	*cb*	*a*	*aa*	*b*	*bb*	*c*	*cc*	*a*	*aa*	*b*
ca		*ac*		*bb*		*ca*		*ab*		*bc*	
ab		*ba*		*cc*		*ac*		*ba*		*cb*	
cb	*b*	*aa*	*c*	*bc*	*a*	*cc*	*b*	*aa*	*c*	*bb*	*a*
ac		*bb*		*ca*		*ab*		*bc*		*ca*	
ba		*cc*		*ab*		*ba*		*cb*		*ac*	

The second of these taken by rows gives the $SGS\{\underset{\bullet}{3}, 3, 3\}$ found in §15 g.

III.

WHIST-TOURNAMENT ARRANGEMENTS $Wh[m]$.

1. $Wh[m]$. The m players ($m \equiv 0$, mod. 4) in a whist tournament are designated by the m letters $a_1, a_2, \ldots, a_m$. The players play seated by fours at $\frac{1}{4}m$ tables. Each table stands according to the points of the compass, and the players sit accordingly. $\{a_i a_j a_k a_l\}$ occupy the respective positions $\{N\,S\,W\,E\}$. a_i and a_j play together as partners against their opponents, the partners a_k and a_l. A say *evening* is any arrangement of the m players at the $\frac{1}{4}m$ tables.

In arranging the programme for a whist tournament different whist-considerations lead to different desiderata. The problem in every case is in ultimate formulation purely tactical.

Mr. Mitchell, in his *Duplicate Whist* (p. 17), formulates a problem which has considerable tactical interest. We define—

Wh [*m*]. *A whist-tournament arrangement in m players* *Wh* [*m*] ($m \equiv 0$, mod. 4) *is an arrangement of* $m - 1$ *evenings of play in such a way that every player meets in play every other player once as partner and twice as opponent.* The understanding is that there is involved *no question of order* of the (1) evenings, (2) tables, and (3) players at a table, except as indicated by the partnership pairs. In accordance with (3) we use the notation $|a_i a_j a_k a_l|$ for a say *table* of players; this table is unchanged if we make on the four letters certain eight substitutions, those of the group G_8^4 which preserve the pairings $a_i a_j$, $a_k a_l$.

Whist-tournament arrangements *Wh* [*m*] have been constructed* by Messrs. Mitchell, Safford, Howell, and Whitfeld for the cases

$$m = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \text{ and } 40.$$

No general theorems or methods have heretofore been published.

2. *Cyclic Wh* [*m*]. A *Wh* [*m*] is called *cyclic* if the $m - 1$ evenings are obtained from the first by repetitions of a certain say *cyclic substitution* σ which leaves one letter fixed and permutes the $m - 1$ remaining in one cycle σ. (No confusion will arise from using the same notation for the cyclic substitution and its cycle.) For the letters of a cyclic *Wh* [*m*] the *index* notation is the clearest. The m letters or indices are $*, 0, 1, 2, \ldots \overline{m-2}$; the substitution $\sigma \equiv (i' = i + 1)$ leaves $*$ fixed and replaces i by $i + 1$ $(i = 0, 1 \ldots \overline{m-2})$, the indices being taken modulo $m - 1$; in this index notation the cyclic *Wh* [*m*] is given by its first evening.

The arrangements heretofore constructed are† *with one exception all cyclic*, and they were for the most part so constructed. We have, e. g.,

Wh [4]	|* 0 1 2|.	(Only class.)
Wh [8]	|* 0 4 5| |1 3 2 6|.	(Safford: B, p. 119.) (Only class.)
Wh $[12]_1$	|* 0 4 5| |1 10 2 8| |3 7 6 9|.	(Safford: B, p. 119.)
Wh $[12]_2$	|* 0 2 3| |1 8 5 7| |4 10 6 9|.	(New class.)
Wh [16]	|* 0 10 5| |1 2 4 8| |3 11 14 12| |6 9 13 7|.	(Safford: B, p. 119.)

* For the published literature of the subject see:

A. "Duplicate Whist," by John T. Mitchell (McClurg, Chicago, 1891), pp. 17, 18, 21.

B. The periodical "Whist," vol. 1, pp. 101, 119, 128, 149, 1891-2 (Cassius M. Paine, editor, Milwaukee, Wis.).

C. "Duplicate Whist and Whist Strategy," by R. F. Foster (Brentano, 1894), pp. 64, 68, 71.

I shall cite these sources by the letters A, B, C.

Mr. Mitchell called my attention to the problem. In the second edition of his "Duplicate Whist," a chapter on this subject by Mr. Whitfeld will be incorporated.

† As Mr. Mitchell has informed me.

Let us have a (first) evening given in this index notation. From it we write down in all $m-1$ evenings. Have we now a $Wh[m]$? The $*$ assuredly meets every other player once as partner, twice as opponent. Between every two indices i_1, i_2 $(i_1 \neq i_2)$ there are on the face of the cycle σ two *intervals* $\pm(i_1 - i_2)$, modulo $m-1$; these are distinct since $m-1$ is odd. There are in all $m-2$ intervals. We compute from the given first evening two interval-systems $(IS)_p$ and $(IS)_o$, containing the intervals between $(IS)_p$ every pair of partners, $(IS)_o$ every pair of opponents. [Since an interval is invariant under the cyclic substitution, these interval-systems have no particular relation to the first evening.] The interval-system $(IS)_p$ contains $m-2$ intervals; if every possible interval is present ($\therefore$ without repetition), in the $m-1$ evenings' play every player meets every other player once as partner. The interval-system $(IS)_o$ contains $2(m-2)$ intervals; if every possible interval is present twice ($\therefore$ exactly twice), in the $m-1$ evenings' play every player meets every other player twice as opponent. The given first evening leads then to a (cyclic) $Wh[m]$ if and only if the two interval-systems satisfy the two conditions just explained.

3. *The substitution-group G^m of a cyclic $Wh[m]$ ($m-1$ prime).* The substitutions on the m letters leaving any $Wh[m]$ invariant form a group G^m; those substitutions of G^m leaving any index i invariant form a sub-group $G^{m;i}$. For the *cyclic* $Wh[m]$ the G^m is transitive either on all m letters or on $m-1$ letters. In the latter case every substitution leaves $*$ fixed; G^m and $G^{m;*}$ are identical. In the former case the m sub-groups $G^{m;i}$ $(i = *, 0, 1 \ldots \overline{m-2})$ are conjugate under G^m. We study then primarily the sub-group $G^{m;*}$. We assume that $m-1$ is prime.

The $G^{m;*}$ contains the fundamental cyclic substitution σ of the cyclic $Wh[m]$, and hence the cyclic sub-group $G_{m-1}\{\sigma\}$ of order $m-1$. Now the $Wh[m]$ *of itself* defines a say *natural* cycle of the $m-1$ indices ($*$ apart). In this way: The $Wh[m]$ contains say the table $|* \; g \; 0 \; h|$, and hence the tables $|* \; f+g \; f \; f+h|$ $(f = 0, 1, \ldots \overline{m-2})$. The cycle in question is $0, h, 2h, \ldots kh, \ldots (m-2)h$; this cycle contains the $m-1$ indices in a definite (perhaps reversible) cyclic order; any two consecutive letters $kh \; (k+1)h$ of the cycle are in the $Wh[m]$ paired as partners against $*$, in the table $|* \; kh+g \; kh \; (k+1)h|$. Any substitution of $G^{m;*}$ throws this cycle into itself, perhaps reversing the cyclic order. The $G^{m;*}$ is obtained from the $G_{m-1}\{\sigma\}$ by extending it by the

substitutions τ of the group $G^{m;*0}$, leaving $*$ and 0 each fixed. Obviously any such τ is of the form $i' = i$ or $i' = -i$. Hence the $G^{m;*}$ is either the cyclic group $G_{m-1}\{\sigma\}$, $i' = i + f$ $(f = 0, 1 \ldots \overline{m-2})$, or the dihedron group $G_{2(m-1)}$, $i' = \pm i + f$ $(f = 0, 1 \ldots \overline{m-2})$.

The $G^{m;*}$ is indeed the $G^{m;*}_{2(m-1)}$ if and only if the substitution $i' = -i$ throws the (initial) evening with the table $|* \ 0 \ -g \ h-g|$ into itself; for this, a necessary condition is that $h \equiv 2g$ (mod. $m-1$).

The natural cycle given above corresponds to the cyclic substitution σ^h, which is therefore a *natural* fundamental cyclic substitution of the cyclic $Wh\,[m]$; σ^{-h} plays the same rôle. This remark furnishes a convenient *normal form* for the cyclic $Wh\,[m]$ ($m-1$ prime): *the opponents of* $*$ *are always consecutive indices.* (The $Wh\,[m]$, $m = 4, 8, 12$, given above are exhibited in this normal form.)

Now if the G^m is transitive on the m letters there must be a corresponding natural cycle with respect to every index. For any particular $Wh\,[m]$ it is easy to see whether the opponents of say 0 do determine such a natural cycle, and if so whether the corresponding cyclic substitution does throw the $Wh\,[m]$ into itself. If such a substitution exists, it extends the $G^{m;*}_{m-1 \text{ or } 2(m-1)}$ to the $G^m = G^m_{m(m-1) \text{ or } 2m(m-1)}$; if not, the G^m is identical with the $G^{m;*}_{m-1 \text{ or } 2(m-1)}$.

The $G^m_{m(m-1)}$ is exactly doubly transitive on the m letters, and hence (II 11 a) can occur only if $m = 2^{n+1}$, $m-1$ prime.

As to our examples:

$Wh\,[4]$	$G^{4;*}_{6=2.3}$.	$G^4_{24=4.6}$.	Extender $(0)(* \ 1 \ 2)$.
$Wh\,[8]$	$G^{8;*}_{7}$.	$G^8_{56=8.7}$.	Extender $(0)(* \ 2 \ 4 \ 5 \ 1 \ 6 \ 3)$.
$Wh\,[12]_1$	$G^{12;*}_{11} = G^{12}_{11}$.		
$Wh\,[12]_2$	$G^{12;*}_{11} = G^{12}_{11}$.		

There is no cyclic $Wh\,[m]$ with $G^{m;*} = G^{m;*}_{2(m-1)}$ for $m = 8, 12$ or 20.

4. *Concerning the substitution-group G^m of a cyclic $Wh\,[m]$ ($m-1$ composite).* I call attention briefly to certain *natural cycles, chains, rulings* of the $m-1$ letters ($*$ apart) which play a fundamental rôle in the determination of the $G^{m;*}$ and of the G^m. These depend upon the tables $|* \ f+g \ f \ f+h|$ $(f = 0, 1 \ldots \overline{m-2})$ containing $*$. Denote by d', d'', d''' the greatest common divisors $d' = [h, m-1]$, $d'' = [g, h, m-1]$, $d''' = [2g-h, m-1]$.

As before a *cycle* has the characteristic property that every two consecutive letters are paired as partners against $*$. f lies in the cycle $f+kh\,(k=0, 1, \ldots)$. The $m-1$ letters break into d' cycles of $(m-1)/d'$ letters each. The $(m-1)/d'$ letters of a cycle have a definite (perhaps reversible) cyclic order.

But $f\,f+h$ at the table $|*\ f+g\ f\ f+h|$ are paired also against $f+g$. In this way the cycle containing f *rests upon* the cycle containing $f+g$, and it in turn upon another cycle, and so on. In this way the d' cycles break into d'' *chains* of d'/d'' cycles and $(m-1)/d''$ letters each. The d'/d'' cycles of a chain have a definite and irreversible cyclic order.

On a chain every letter f belongs to a certain *ruling*. In the tables containing $*$, f opposes $*$ at the two tables $|*\ f+g\ f\ f+h|$, $|*\ f+g-h\ f-h\ f|$; f in its cycle rests upon the sequence $f+g-h\ f+g$ in the succeeding cycle, and in view of the table $|*\ f+2g-h\ \ f+g-h\ \ f+g|$ this sequence $f+g-h\ f+g$ rests upon $f+2g-h$ in the third cycle. f belongs to the *ruling* $f+k\,(2g-h)$ $(k=0, 1 \ldots.)$.

In this way the $m-1$ letters break into d''' rulings of $(m-1)/d'''$ letters each. The $(m-1)/d'''$ letters of a ruling have a definite and irreversible cyclic order. Every chain contains d'''/d'' rulings. A ruling cuts out $(m-1)\,d''/d'd'''$ letters from every cycle of the chain; this number is 1 if and only if $(2g-h)\,d'/d'' \equiv 0 \pmod{m-1}$; except in this case, the number is ≥ 3, *and the irreversible cyclic order on the ruling establishes* an irreversible cyclic order on every cycle of the chain.* Even if $(2g-h)\,d'/d'' \equiv 0 \pmod{m-1}$, the cyclic orders of the d'/d'' cycles of the chain depend upon the cyclic order of any one of the cycles, so that we may speak of the cyclic order of the chain itself.

5. *$Wh\,[m]$ associated† with $SGS\,[4, 2, m]$* ($\therefore\ m=12\nu+4,\ \nu \geq 0$ (II 8 c)). A $SGS\,[4, 2, m]$ is (II 6) an arrangement of the m letters in $\frac{1}{12}\,m\,(m-1)$ 4-ads so that every two letters meet once in a 4-ad, and then a separation of these 4-ads into $\frac{1}{3}\,(m-1)$ sets s_1 of $\frac{1}{4}\,m$ 4-ads each, every letter appearing once in the 4-ads of every set s_1. From every such $SGS\,[4, 2, m]$ we can construct† in all $6^{\frac{1}{12}(m-4)(m-1)}$ *associated $Wh\,[m]$*. Every 4-ad $[a_i\,a_j\,a_k\,a_l]$ yields three evenings'

* For $m-1$ prime, $\therefore\ d'=d''=d'''=1$, unless $2g-h \equiv 0 \pmod{m-1}$, the $d'=1$ cycle has an irreversible cyclic order (as we saw in §8).

† The only non-cyclic $Wh\,[m]$ heretofore constructed is Mr. Mitchell's $Wh\,[16]$ (A, p. 21) which is, as I say, associated with the (unique) $SGS\,[4, 2, 16]$. Of the 6^{15} $Wh\,[16]$ thus virtually given certain are surely cyclic (e. g. Mr. Safford's cyclic $Wh\,[16]$, B, p. 119), but it is quite unlikely that all are.

play for these four players, viz. at the tables $|a_i a_j a_k a_l|$, $|a_i a_k a_l a_j|$, $|a_i a_l a_j a_k|$. Every set s_1 yields thus (in $6^{\frac{1}{2}(m-4)}$ ways) three evenings' play for the m players. Any $m-1$ evenings' play so obtained from the $\frac{1}{3}(m-1)$ sets s_1 of the $SGS[4, 2, m]$ constitutes obviously a $Wh[m]$.

Thus we can construct a $Wh[4^n]$ (*n any integer*) associated with the $SGS[4, 2, 4^n]$ derived from the Galois-field $GF[4^n]$ (II 10 g), and a $Wh[4, 2, m = 3p+1]$ (*p any prime of the form* $p = 4\nu + 1$) associated with the $SGS[4, 2, m = 3p+1]$ to be constructed in §6 (II 10 h).

Again, we can compound two given $Wh[m_1]$, $Wh[m_2]$ associated with $SGS[4, 2, m_1]$, $SGS[4, 2, m_2]$ respectively into a $Wh[m_1 m_2]$ associated with the compound $SGS[4, 2, m_1 m_2]$ (II 16 i).

6. *Cyclic* $SGS[4, 2, m = 3p+1]$ *where p is any prime of the form* $p = 3\nu + 1$. Before constructing this arrangement it is convenient to consider briefly more generally—

Cyclic $SGS[k, 2, m]$; $m = k(\overline{k-1}\,\nu + 1) = (k-1)p + 1$, *p any integer of the form* $p = k\nu + 1$ (II 8 c). We call a $SGS[k, 2, m]$ cyclic if for a certain index notation (§2) of the m letters the substitution $\sigma \equiv (i' = i+1)$ permutes the $p = (m-1)/(k-1)$ sets $s_1 \equiv SGS[k, 1, m]$ cyclically. Then $\sigma^p \equiv (i' = i+p)$ throws every $SGS[k, 1, m]$ and also the $*$ into itself, and thus every k-ad containing $*$ into itself. Thus $*$ appears in the k-ad $[* \; vp \; (v = 0, 1, \ldots \overline{k-2})]$ in say the first $SGS[k, 1, m]$. This remark determines the p k-ads which contain $*$. The index u appears in the k-ad $[* \; u + vp \; (v = 0, 1, \ldots \overline{k-2})]$ with *every* index u' whose forward interval from u on the face of the cycle σ, viz. $u' - u$ (mod. $m - 1 = (k-1)p$) is divisible by p. Hence these intervals vp occur *only* in the k-ads containing $*$. The original $SGS[k, 2, m]$ contains besides the k-ad $[* \; vp]$ $(k-1)\nu$ k-ads; these $(k-1)\nu$ k-ads break into ν sets of $k-1$ k-ads each; if one k-ad is $[i'_1 \ldots i'_f \ldots i'_k]$, or say $[[i'_f]]$, the $k-1$ k-ads of its set are $[[i_f]]$ where

$$i_f \equiv i'_f + vp \text{ (mod. } kp) \; (f = 1 \ldots k). \qquad (v = 0 \ldots \overline{k-2})$$

We denote the $(k-1)k\nu = m - k$ indices of these $(k-1)\nu$ k-ads by $i_{fgv}\begin{pmatrix} f = 1 \ldots k \\ g = 1 \ldots \nu \\ v = 0 \ldots k-2 \end{pmatrix}$, so that the k indices i_{fgv} $(f = 1 \ldots k)$ constitute a k-ad $[[i_f]]_{gv}$, and the $k-1$ k-ads $[[i_f]]_{gv}$ $(v = 0 \ldots k-2)$ belong to such a

set, and the ν sets are obtained by varying g $(g = 1 \ldots . \nu)$. We set in particular $i_{fg} = i_{fg0} \binom{f = 1 \ldots . k}{g = 1 \ldots . \nu}$, $i_{fgv} \equiv i_{fg} + vp \pmod{kp}$ $(v = 0 \ldots . k - 2)$, and $[[i_f]]_{\sigma v} = [[i_f]]_g$.

Suppose, in an effort to construct a cyclic $SGS[k, 2, m]$, we succeed in distributing to our m indices $* \; 0 \ldots . \overline{m-1}$ the notation $* \; vp \; i_{fgv}$ subject to the preceding conditions. Then the $(k-1)\nu + 1$ k-ads $[* \; vp] \; [[i_f]]_{\sigma v} \binom{g = 1 \ldots . \nu}{v = 0 \ldots . k-2}$ constitute a $SGS[k, 1, m]$ in the desired way invariant under σ^p.

From this we obtain in all p $SGS[k, 1, m]$ by successive application of σ. These p $SGS[k, 1, m]$ constitute a (cyclic) $SGS[k, 2, m]$ (II 8 g) if no 2-ad occurs in more than one k-ad of the arrangement, that is, here, if no interval occurs in more than one of the ν k-ads $[[i_f]]_g$ $(g = 1 \ldots . \nu)$.

The $SGS[p^{n'}, 2, p^{nn'}]$ (p a prime, n, n' positive integers) of II 10 f is cyclic.

We proceed to construct a cyclic $SGS[k, 2, m]$ for the particular case $k = 4$, $p = 4\nu + 1$ a prime, $m = 4(3\nu + 1)$, $m - 1 = 3p$; $p \neq 3$.

The m indices are $*$ and $m - 1 = 3p$ indices i taken modulo 3ν. Let r_0 be a primitive root of the congruence $x^{p-1} = x^{4\nu} \equiv 1 \pmod{p}$. Determine $r \pmod{3p}$ by the conditions $r \equiv r_0 \pmod{p}$, $r \not\equiv 0 \pmod{3}$. Determine $s \pmod{3p}$ by the conditions $s \equiv r^\nu \pmod{p}$, $s \equiv -1 \pmod{3}$. Then $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$, $s^2 \equiv +1 \pmod{3}$, $s^4 \equiv +1 \pmod{3p}$.

Then when we set

$$i_{fg} \equiv s^{f-1} r^{g-1} \binom{f = 1 \ldots . 4}{g = 1 \ldots . \nu}, \; i_{fgv} \equiv i_{fg} + vp \; (v = 0, 1, 2) \pmod{3p}$$

we have in the $3\nu + 1$ 4-ads

$$[* \; 0 \; p \; 2p] \; [[i_f]]_{\sigma v} \qquad \binom{g = 1 \ldots . \nu}{v = 0, 1, 2}$$

the first $SGS[4, 1, 3p + 1]$ of a cyclic $SGS[4, 2, 3p + 1]$. In fact, in the first place, the $4\nu = p - 1$ indices i_{fg} are (mod. p) respectively congruent to the numbers $1, 2, \ldots . p - 1$ in a certain order, and so the $3(p - 1) = m - 4$ indices i_{fgv} are exactly the m indices lacking $* \; 0 \; p \; 3p$. And in the second place, no interval occurs in more than one of the ν 4-ads

$$[[i_f]]_g = [r^{g-1} \; sr^{g-1} \; s^2 r^{g-1} \; s^3 r^{g-1}]. \qquad (g = 1 \ldots . \nu)$$

The 4-ad $[[i_f]]_g$ has the twelve intervals

$$\pm\left(s-1,\ s(s-1),\ s^2(s-1),\ s^3(s-1)\equiv 1-s^3,\ s^2-1,\ s(s^2-1)\right)r^{g-1}.$$

Of these the only ones divisible by 3 are the four $\pm(1, s)r^{g-1}(s^2-1)$. The $4\nu = p-1$ intervals $\pm(1, s)r^{g-1}(s^2-1)$ $(g = 1 \ldots . \nu)$ are exactly the $p-1$ distinct intervals divisible by 3, since $s^2 \equiv -1$ (mod. p). The $8\nu = 2(p-1)$ intervals $\pm(1, s, s^2, s^3)r^{g-1}(s-1)$ $(g = 1 \ldots . \nu)$ are exactly the $2(p-1)$ distinct intervals divisible neither by 3 nor by p. For the congruence $s^{f-1}r^{g-1} \equiv +s^{f'-1}r^{g'-1}$ (mod. $3p$) or even (mod. p), requires $f = f'$, $g = g'$, while the congruence $s^{f-1}r^{g-1} \equiv -s^{f'-1}r^{g'-1}$ (mod. $3p$) is impossible, since $s^2 \equiv -1$ (mod. p), $s^2 \equiv +1$ (mod. 3).

For example:

Cyclic $SGS\,[4, 2, 16]$ $r = 2$, $s = 2$: exhibited in II 10 g.
Cyclic $SGS\,[4, 2, 40]$ $r = 2$, $s = 8$: exhibited in §7.
Cyclic $SGS\,[4, 2, 52]$ $r = 5$, $s = 47$: exhibited in §7.

7. *Triple-whist-tournament arrangements* $TWh\,[m]$. At a *table* $|a_i a_j a_k a_l|$ there is no distinction between the two opponents of a player. We introduce the notion: *triple-table* $(a_i a_j a_k a_l)$ at which the pairs of (p) *partners* are $a_i a_j$, $a_k a_l$; (o_1) *opponents of the first kind* are $a_i a_k$, $a_j a_l$; (o_2) *opponents of the second kind* are $a_i a_l$, $a_j a_k$. The four triple-tables

$$(a_i a_j a_k a_l),\ (a_j a_i a_l a_k),\ (a_k a_l a_i a_j),\ (a_l a_k a_j a_i),$$

are identical; a triple-table $(a_i a_j a_k a_l)$ is invariant under the substitutions of the four-group G_4^4, preserving the three pairings (p) $a_i a_j$, $a_k a_l$; (o_1) $a_i a_k$, $a_j a_l$; (o_2) $a_i a_l$, $a_j a_k$. A table $|a_i a_j a_k a_l|$ yields two triple-tables $(a_i a_j a_k a_l)$, $(a_i a_j a_l a_k)$. A 4-ad $[a_i a_j a_k a_l]$ yields six triple-tables

$$(a_i a_j a_k a_l),\ (a_i a_k a_l a_j),\ (a_i a_l a_j a_k),$$
$$(a_i a_j a_l a_k),\ (a_i a_k a_j a_l),\ (a_i a_l a_k a_j);$$

the pairings (p, o_1, o_2) of one of these triple-tables reappear at the six tables in (all) six different permutations.

I introduce then (as having tactically and also whist-theoretically considerably more interest than the $Wh\,[m]$) the $TWh\,[m]$ defined thus:

$TWh\,[m]$. *A triple-whist-tournament arrangement in m players* $TWh\,[m]$ $(m \equiv 0, \text{mod. } 4)$ *is an arrangement of* $m-1$ *evenings of play at triple-tables in*

such a way that every player meets every other player once as partner, once as opponent of the first kind, and once as opponent of the second kind.

We have seen that one triple-table gives rise to six triple-tables by permuting in the six possible ways the three players seated say at S, W, E; every such permutation permutes correspondingly the pairings (p, o_1, o_2). If in a given $TWh[m]$ we make in every triple-table simultaneously the same permutation of the players seated at S, W, E, we change the $TWh[m]$ into another $TWh[m]$.

Every $TWh[m]$ yields then *six* $TWh[m]$. Every $TWh[m]$ yields, as it stands, one $Wh[m]$, and in all (not six but) *three* $Wh[m]$. Thus the term, TRIPLE-*whist-tournament arrangement*, is justified.

What about the existence of $TWh[m]$? A $Wh[m]$ may or may not yield a $TWh[m]$ when we replace its tables by triple-tables, each table by one of its two triple-tables.

A *cyclic* $Wh[m]$ yields a *cyclic* $TWh[m]$ if we can so replace the tables of the first evening of the cyclic $Wh[m]$ by triple-tables that (using the index notation) the interval-systems $(IS)_p$, $(IS)_{o_1}$, $(IS)_{o_2}$ for the pairings (p), (o_1), (o_2) shall each include the $m-2$ possible intervals. Thus, for example, I have written down the cyclic $Wh[4]$, $Wh[8]$, $Wh[16]$ of §2, so that as they stand they yield cyclic $TWh[4]$, $TWh[8]$, $TWh[16]$. On the other hand, neither the cyclic $Wh[12]_1$ nor the cyclic $Wh[12]_2$ yields a cyclic $TWh[12]$. Indeed, in a search intended to be systematic and exhaustive no cyclic $TWh[12]$ came to light.

Every $SGS[4, 2, m]$ *gives rise to an associated* $TWh[m]$; we let the 4-ad $[a_i\, a_j\, a_k\, a_l]$ yield the first or the second triad of triple-tables written down above.

Every cyclic SGS $[4, 2, m]$ (§6) *gives rise to an associated cyclic* $TWh[m]$; the $3\nu + 1$ triple-tables of the first evening are

$$(*\ 0\ p\ 2p)\ (i_{1g0}\ i_{2g0}\ i_{3g0}\ i_{4g0})\ (i_{1g1}\ i_{3g1}\ i_{4g1}\ i_{2g1})\ (i_{1g2}\ i_{4g2}\ i_{2g2}\ i_{3g2}). \quad (g = 1 \ldots . \nu)$$

Thus from the cyclic $SGS[4, 2, m]$ of §6 (II 10 g, h) we have for example:

Cyclic $TWh[16]$ associated with $SGS[4, 2, 16]$:

$$(*\ 0\ 5\ 10)\quad (1\ 2\ 4\ 8)\quad (6\ 13\ 9\ 7)\quad (11\ 12\ 14\ 3).$$

Cyclic $TWh[64]$ associated with $SGS[4, 2, 64]$:

$$(*\ 0\ 21\ 42)$$

$$\begin{array}{lllll}
(\ 1\ 25\ 56\ 58) & (\ 2\ 50\ 49\ 53) & (\ 3\ 13\ 20\ 57) & (\ 6\ 26\ 40\ 51) & (12\ 52\ 17\ 39) \\
(22\ 14\ 16\ 46) & (23\ \ 7\ 11\ \ 8) & (24\ 41\ 15\ 34) & (27\ 61\ \ 9\ 47) & (33\ 38\ 60\ 10) \\
(43\ 37\ \ 4\ 35) & (44\ 32\ 29\ 28) & (45\ 36\ 55\ 62) & (48\ 30\ \ 5\ 19) & (54\ 18\ 31\ 59).
\end{array}$$

Cyclic $TWh\,[40]$ associated with $SGS\,[4,\ 2,\ 40]$:

$$(*\ 0\ 13\ 26)$$

$$\begin{array}{lll}
(\ 1\ \ 8\ 25\ \ 5) & (\ 2\ 16\ 11\ 10) & (\ 4\ 32\ 22\ 20) \\
(14\ 38\ 18\ 21) & (15\ 24\ 23\ 29) & (17\ 35\ 33\ \ 6) \\
(27\ 31\ 34\ 12) & (28\ 36\ \ 3\ 37) & (30\ \ 7\ 19\ \ 9).
\end{array}$$

Cyclic $TWh\,[52]$ associated with $SGS\,[4,\ 2,\ 52]$:

$$(*\ 0\ 17\ 34)$$

$$\begin{array}{llll}
(\ 1\ 47\ 16\ 38) & (\ 5\ 31\ 29\ 37) & (25\ \ 2\ 43\ 32) & (23\ 10\ 11\ \ 7) \\
(18\ 33\ \ 4\ 13) & (22\ 46\ \ 3\ 48) & (42\ \ 9\ 49\ 19) & (40\ 28\ 24\ 27) \\
(35\ 21\ 30\ 50) & (39\ 20\ 14\ 12) & (\ 8\ 15\ 36\ 26) & (\ 6\ 41\ 44\ 45).
\end{array}$$

8. *The* $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}$ *associated with a* $TWh\,[m]$. Suppose in a $TWh\,[m]$ we write in place of every triple-table $(a_i\,a_j\,a_k\,a_l)$ the four 4-ids $\{a_i\,a_j\,a_k\,a_l\}$, $\{a_j\,a_i\,a_l\,a_k\}$, $\{a_k\,a_l\,a_i\,a_j\}$, $\{a_l\,a_k\,a_j\,a_i\}$ corresponding to that triple-table and coming out of any one of them by the substitutions of the four-group G_4^4. We obtain from every evening of the $TWh[m]$ obviously a $SGS\{4,\ 1,\ m\}$; these $m-1$ $SGS\,\{4,\ 1,\ m\}$ constitute (II 9 h) a $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}$, since two 4-ids never have a 2-id in common. Conversely, a $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}$ whose every $SGS\,\{4,\ 1,\ m\}$ contains simultaneously with a 4-id $\{a_i\,a_j\,a_k\,a_l\}$ those four 4-ids determines a $TWh\,[m]$.

Thus the $TWh\,[m]$ occupies a position intermediate between the $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}$ and the $SGS\,[4,\ 2,\ m]$, the mediation being effected by the $SGS\,\{4,\ 1,\ 4\}$ dependent upon the G_4^4. Just so in general any $SGS\,\{k,\ 1,\ k\}$ leads to arrangements intermediate between the $SGS\,\{k,\ l,\ m\}$ and the $SGS\,[k,\ l,\ m]$. We have (II 16 e) for the $SGS\,\{k,\ 2,\ m\}$ a composition theorem. When the mediating $SGS\,\{k,\ 1,\ k\}$ depends upon a group G_k^k, this composition effects a composition for the intermediate arrangements.

9. *Given a* $TWh\,[m]^{(a)}$ *and a* $TWh\,[n]^{(b)}$: *to construct a* $TWh\,[mn]^{(c)}$.

We use the $m,\ n,\ mn$ letters $a_i\,(i=1\ldots.m)$, $b_j\,(j=1\ldots.n)$, $c_{ij}\begin{pmatrix} i=1\ldots.m \\ j=1\ldots.n \end{pmatrix}$.

We make from the given $TWh\,[m]^{(a)}$ its associated $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}^{(a)}$ (§8). We extend this $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}^{(a)}$ to a $SGS\,\{4,\ 2,\ m\}^{(a)}$ by adding as m^{th} $SGS\,\{4,\ 1,\ m\}^{(a)}$ the m 4-idic sequences $\{a_i\,a_i\,a_i\,a_i\}$ $(i=1\ldots.m.)$

The given $TWh\,[n]^{(b)}$ yields similarly a $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 2,\ n\}^{(b)}$.

We compound the $\underset{\cdot}{4}$-ids $\{a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}\}$, $\{b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3}b_{j_4}\}$ into the $\underset{\cdot}{4}$-id $\{c_{i_1j_1}c_{i_2j_2}c_{i_3j_3}c_{i_4j_4}\}$; every $\underset{\cdot}{4}$-id$^{(c)}$ is so obtainable and in only one way.

When we compound in this way every $\underset{\cdot}{4}$-id$^{(a)}$ of a $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ m\}^{(a)}$ with every $\underset{\cdot}{4}$-id$^{(b)}$ of a $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ n\}^{(b)}$, we obtain a $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ mn\}^{(c)}$. Making such composition of the m $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ m\}^{(a)}$ of the $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 2,\ m\}^{(a)}$ with the n $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ n\}^{(b)}$ of the $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 2,\ n\}^{(b)}$ we obtain mn $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ mn\}^{(c)}$ constituting a $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 2,\ mn\}^{(c)}$ (II 16 b). Discarding the $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ mn\}^{(c)}$ compounded from the mth $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ m\}^{(a)}$ and the nth $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 1,\ n\}^{(b)}$ which contains the mn $\underset{\cdot}{4}$-idic sequences $\{c_{ij}c_{ij}c_{ij}c_{ij}\}\begin{pmatrix} i=1\ldots m \\ j=1\ldots n\end{pmatrix}$, the only $\underset{\cdot}{4}$-ids not 4-ids of the $SGS\,\{\underset{\cdot}{4},\ 2,\ mn\}^{(c)}$, we obtain (II 16 e) a $SGS\,\{4,\ 2,\ mn\}^{(c)}$. Every $SGS\,\{4,\ 1,\ mn\}^{(c)}$ of this $SGS\,\{4,\ 2,\ mn\}^{(c)}$ contains simultaneously with a 4-id $\{c_{i_1j_1}c_{i_2j_2}c_{i_3j_3}c_{i_4j_4}\}$ its four conjugate 4-ids under the group G_4^4 of position-permutations, and is thus associated (§8) with the $TWh\,[mn]^{(c)}$ desired.

This same method serves to compound a $Wh\,[mn]^{(c)}$ from a $TWh\,[m]^{(a)}$ and a $Wh\,[n]^{(b)}$. I proceed to explain more exactly.

10. *The three interlaced* $SGS\,[2,\ 2,\ m]$ *of a* $TWh\,[m]$. A $Wh\,[m]$ by its partnership-pairings as distributed over the $m-1$ evenings exhibits a $SGS\,[2,\ 2,\ m]_p$. Similarly by its three kinds of pairings a $TWh\,[m]$ exhibits three interlaced $SGS\,[2,\ 2,\ m]$, say $SGS\,[2,\ 2,\ m]_p$, $SGS\,[2,\ 2,\ m]_{o_1}$, $SGS\,[2,\ 2,\ m]_{o_2}$. The interlacing is in this fashion: The $m-1$ sets of the three $SGS\,[2,\ 2,\ m]$ are in 1—1—1 correspondence. No two of any three corresponding sets have a 2-ad in common. Any three corresponding sets are so related that if a letter a_i enters them in the 2-ads $[a_i\,a_j]$, $[a_i\,a_k]$, $[a_i\,a_l]$ respectively, they contain respectively the 2-ads $[a_k a_l]$, $[a_l a_j]$, $[a_j a_k]$. Conversely, three (ordered) $SGS\,[2,\ 2,\ m]$ so interlaced determine a $TWh\,[m]$.

In the process (§9) of compounding a $TWh\,[m]^{(a)}$ and a $TWh\,[n]^{(b)}$ into a $TWh\,[mn]^{(c)}$, we obviously compound the three interlaced $SGS\,[2,\ 2,\ m]^{(a)}$ with the three interlaced $SGS\,[2,\ 2,\ n]^{(b)}$ (each system of the first three with its corresponding system of the second three) to form the three interlaced $SGS\,[2,\ 2,\ mn]^{(c)}$. Each pair separately compounds by the process of II 16 e.

11. *Given a* $TWh\,[m]^{(a)}$ *and a* $Wh\,[n]^{(b)}$: *to construct a* $Wh\,[mn]^{(c)}$.

Replace every table $|b_{j_1}\,b_{j_2}\,b_{j_3}\,b_{j_4}|$ of the $Wh\,[n]^{(b)}$ as it stands by the triple

table $(b_{j_1}\, b_{j_2}\, b_{j_3}\, b_{j_4})$. Thus we obtain say a *pseudo-TWh* $[n]^{(b)}$. (If we obtain a $TWh\,[n]^{(b)}$, §8 applies at once.) This pseudo-$TWh\,[n]^{(b)}$ determines and is determined by three interlaced arrangements $SGS\,[2,\,2,\,n]_p^{(b)}$; pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,n]_{o_1}^{(b)}$, pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,n]_{o_2}^{(b)}$.

We apply a process quite analogous to that of §9 to the $TWh\,[m]^{(a)}$ and the pseudo-$TWh\,[n]^{(b)}$ and obtain a pseudo-$TWh\,[mn]^{(c)}$ yielding when we replace every triple-table by the corresponding table the $Wh\,[mn]^{(c)}$ desired. In fact, the $SGS\,[2,\,2,\,m]_p^{(a)}$ and the $SGS\,[2,\,2,\,n]_p^{(b)}$ compound into a $SGS\,[2,\,2,\,mn]_p^{(c)}$. The $SGS\,[2,\,2,\,m]_{o_1}^{(a)}$ and the pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,n]_{o_1}^{(b)}$ compound into a pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_1}^{(c)}$, and similarly the two arrangements o_2 yield a pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_2}^{(c)}$. We must prove that every 2-ad $[c_{i_1j_1}\, c_{i_2j_2}]$ $(i_1j_1 \neq i_2j_2)$ occurs twice in the two pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_1,\,o_2}^{(c)}$. Now every 2-ad $[a_{i_1}\, a_{i_2}]$ $(i_1 \neq i_2)$ occurs once in $SGS\,[2,\,2,\,m]_{o_1}^{(a)}$ and once in $SGS\,[2,\,2,\,m]_{o_2}^{(a)}$. And every 2-ad $[b_{j_1}\, b_{j_2}]$ $(j_1 \neq j_2)$ occurs twice in the two pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,n]_{o_1,\,o_2}^{(b)}$. These two remarks show, the first, that every 2-ad $[c_{i_1j}\, c_{i_2j}]$ $(i_1 \neq i_2)$ occurs once in the pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_1}^{(c)}$ and once in the pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_2}^{(c)}$; the second, that every 2-ad $[c_{ij_1}\, c_{ij_2}]$ $(j_1 \neq j_2)$ occurs twice in the two pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_1,\,o_2}^{(c)}$; and the two together, that every 2-ad $[c_{i_1j_1}\, c_{i_2j_2}]$ $(i_1 \neq i_2,\, j_1 \neq j_2)$ occurs twice in the two pseudo-$SGS\,[2,\,2,\,mn]_{o_1,\,o_2}^{(c)}$.

The composition process (§§9, 11) is *distributive* as to the triple-tables or tables of the $TWh\,[m]^{(a)}$ and of the $TWh\,[n]^{(b)}$ or $Wh\,[n]^{(b)}$. Hence if in the $TWh\,[m]^{(a)}$ certain m' players$^{(a)}$ a_{i_k} $(k = 1 \ldots . m')$ engage in a $TWh\,[m']^{(a)}$ (if at all in a $Wh\,[m']^{(a)}$ it will be in a $TWh\,[m']^{(a)}$)—whose evenings need not be *as wholes* parts of certain evenings of the $TWh\,[m]^{(a)}$—and if in the $TWh\,[n]^{(b)}$ or $Wh\,[n]^{(b)}$ certain n' players$^{(b)}$ b_{j_l} $(l = 1 \ldots . n')$ engage in a $TWh\,[n']^{(b)}$ or $Wh\,[n']^{(b)}$, then in the compound $TWh\,[mn]^{(c)}$ or $Wh\,[mn]^{(c)}$ the corresponding $m'n'$ players$^{(c)}$ $c_{i_kj_l}\begin{pmatrix} k = 1 \ldots . m' \\ l = 1 \ldots . n' \end{pmatrix}$ will engage in a $TWh\,[m'n']^{(c)}$ or $Wh\,[m'n']^{(c)}$. For the purposes of the concluding remark just made, it is proper to consider each player a_i or b_j as engaging in a $TWh\,[1]$ by himself; that is, the players c_{ij_l} $(l = 1 \ldots . n'$; i any) engage in a $TWh\,[n']^{(c)}$ or $Wh\,[n']^{(c)}$, and the players c_{i_kj} $(k = 1 \ldots . m'$; j any) in a $TWh\,[m']^{(c)}$.

If the arrangements to be compounded are associated with a $SGS\,[4,\,2,\,m]^{(a)}$, $SGS\,[4,\,2,\,n]^{(b)}$ respectively, the resulting arrangement will be associated with a $SGS\,[4,\,2,\,mn]^{(c)}$.

12. *Direct construction of a system of associated* $SGS\{4, 2, 4^n\}$, $TWh[4^n]$, $SGS[4, 2, 4^n]$ (*n any positive integer*).

We use the $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$ given in II 15 h, viz. the four letters being 1, 2, 3, 4,

$$\begin{array}{llll} \{1\,1\,1\,1\} & \{2\,2\,2\,2\} & \{3\,3\,3\,3\} & \{4\,4\,4\,4\}, \\ \{1\,2\,3\,4\} & \{2\,1\,4\,3\} & \{3\,4\,1\,2\} & \{4\,3\,2\,1\}, \\ \{1\,3\,4\,2\} & \{2\,4\,3\,1\} & \{3\,1\,2\,4\} & \{4\,2\,1\,3\}, \\ \{1\,4\,2\,3\} & \{2\,3\,1\,4\} & \{3\,2\,4\,1\} & \{4\,1\,3\,2\}. \end{array}$$

This $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$ has its sets s_1 invariant under the four-group G_4^4, and is itself invariant under the alternating group G_{12}^4; the G_4^4 is self-conjugate under the G_{12}^4.

We work with the 4^n letters $a_{f_1 \ldots f_j \ldots f_n}$, where the n indices f_j $(j=1 \ldots n)$ have independently the values 1, 2, 3, 4. We denote by F the $\underset{\cdot}{n}$-id of indices $F=\{f_1 \ldots f_j \ldots f_n\}$.

We construct first a $S\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4^n\}$. This system contains those $\underset{\cdot}{4}$-ids $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$; $F_i=\{f_{i1} \ldots f_{ij} \ldots f_{in}\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ for which the $\underset{\cdot}{4}$-id $F^j=\{f_{1j} f_{2j} f_{3j} f_{4j}\}$ is for every j $(j=1 \ldots n)$ a $\underset{\cdot}{4}$-id of the auxiliary $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$.

The $\underset{\cdot}{4}$-id $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$ has four different letters and is a 4-id, or else it is a $\underset{\cdot}{4}$-idic sequence $\{a_F a_F a_F a_F\}$. Discarding these sequences, we have a $S\{4, 2, 4^n\}$.

We exhibit this $S\{4, 2, 4^n\}$ as a $SGS\{4, 2, 4^n\}$. From the 4-id $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$ by its 4-ids F^j $(j=1 \ldots n)$ and any n substitutions σ_j $(j=1 \ldots n)$ of the G_4^4 we obtain by applying σ_j to F^j $(j=1 \ldots n)$ another 4-id of the $S\{4, 2, 4^n\}$. In this way one 4-id determines in all 4^n 4-ids constituting a $S\{4, 1, 4^n\}$; this $S\{4, 1, 4^n\}$ is in like manner determined by any one of the 4^n 4-ids.

Since the auxiliary $SGS\{\underset{\cdot}{4}, 2, 4\}$ is invariant when to every $\underset{\cdot}{4}$-id is applied any the same *position*-permutation π of the G_{12}^4, the $SGS\{4, 2, 4^n\}$ is likewise invariant. A 4-id $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$ gives rise thus in all to twelve 4-ids $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$ containing the same four letters. The four 4-ids $\{\ \}_\pi$, where π belongs to the G_4^4, lie in the $SGS\{4, 2, 4^n\}$ determined by $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$. The other eight lie by fours in the two $SGS\{4, 2, 4^n\}$ determined by $\{a_{F_1} a_{F_3} a_{F_4} a_{F_2}\}$, $\{a_{F_1} a_{F_4} a_{F_2} a_{F_3}\}$ respectively.

Thus the 4^n-1 $SGS\{4, 1, 4^n\}$ of the $SGS\{4, 2, 4^n\}$ separate into $\frac{1}{3}(4^n-1)$ triads of $SGS\{4, 1, 4^n\}$.

Further replacing every 4-id $\{a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4}\}$ by the corresponding triple-table $(a_{F_1} a_{F_2} a_{F_3} a_{F_4})$ and discarding repetitions we have a $TWh\,[4^n]$. Again, replacing every 4-id by the corresponding 4-ad and discarding repetitions we have a $SGS\,[4,\ 2,\ 4^n]$. The $TWh\,[4^n]$ is associated with the $SGS\,[4,\ 2,\ 4^n]$.

The $TWh\,[4^n]$ whose direct construction has just been explained is exactly the $TWh\,[4^n]$ which would have been obtained from the unique $TWh\,[4]$ by successive composition (§8) with itself, obtaining thus $TWh\,[4]$, $TWh\,[4^2]$, ... $TWh\,[4^n]$. The $TWh\,[4^n]$ contains many $TWh\,[4^{n_1}]$ for $n_1 = 1,\ 2, \ldots . n-1$; for instance, the 4^{n_1} players $a_F = a_{f_1 \ldots . f_n}$ whose complexes F of indices have any certain $n - n_1$ indices in common, obviously engage in a $TWh\,[4^{n_1}]$. The question, however, of *all* $TWh\,[4^{n_1}]$ included in this $TWh\,[4^n]$ depends upon a similar question for the $SGS\,\{4,\ 2,\ 4^n\}$, which will not now be taken up.

13. *Summarized results of this study of* $Wh\,[m]$ *and* $TWh\,[m]$.

The new notions—triple-table and triple-whist-tournament arrangement $TWh\,[m]$—and the compositions thereon dependent—(§9) of a $TWh\,[m_1 m_2]$ from given $TWh\,[m_1]$, $TWh\,[m_2]$; (§11) of a $Wh\,[m_1 m_2]$ from given $TWh\,[m_1]$, $Wh\,[m_2]$—are of principal importance.

Let us denote for brevity by

n any positive integer,

d any integer either 0 or $\geqq 2$,

t the integer $t = \frac{1}{4}(3p + 1)$ where p is any prime of the form $p = 4\nu + 1$,

t_n the product of any n integers t,

Then we have obtained directly: (a) $TWh\,[4^n]$ (§12); (b) $TWh\,[8]$ (§7); (c) $TWh\,[4t]$ (§7), whence by composition (§9), (d) $TWh\,[2^{n+1}]$; (e) $TWh\,[4^n t_n]$; (f) $TWh\,[2^{2n+d} t_n]$.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO, *January* 6, 1896.

Etude de Géométrie Cinématique réglée.

PAR RENÉ DE SAUSSURE.

Remarques preliminaires: Comme il y a autant de droites réelles dans l'espace que de points sur une surface imaginaire, on peut établir une correspondance entre chaque droite de l'espace réel et chaque point de la surface imaginaire. Par exemple, si $x = x_1 + ix_2$ et $y = y_1 + iy_2$ sont les deux paramètres complexes qui définissent la position d'un point sur la surface, on peut convenir de faire correspondre à ce point la droite de l'espace dont les coordonnées sont x_1, x_2, y_1, y_2, quel que soit du reste le système de coordonnées employé. Si le point décrit sur la surface une courbe imaginaire, la droite décrit dans l'espace une congruence réelle, puisque toute relation entre x et y équivaut à deux relations entre x_1, x_2, y_1, y_2. On a utilisé ce genre de correspondance pour obtenir une représentation réelle d'une courbe plane imaginaire.* Nous nous proposons d'établir une correspondance purement synthétique entre les points de la surface imaginaire et les droites de l'espace, de manière à obtenir une géométrie de l'espace réglé basée sur la géométrie, supposée connue, de la surface.

Ce but ne peut être atteint par une simple correspondance entre les coordonnées du point imaginaire et celles de la droite réelle, car alors aux notions intuitives de distances, d'angles, etc., sur la surface, ne correspondrait rien d'analogue dans l'espace réglé. La distance de deux points par exemple ne serait plus qu'une fonction complexe des coordonnées de ces deux points, c'est-à-dire dans l'espace, une fonction double des coordonnées des deux droites représentant les deux points. On pourra il est vrai trouver dans l'espace une interprétation géométrique de cette fonction, mais une telle intérpretation ne conservera pas à la définition du mot distance son principal caractère, qui consiste

* Voir: Duport, "Sur un mode particulier de représentation des imaginaires." Annales de l'Ecole Normale Supérieure, vol. 9.

en ce que la distance de deux points doit rester invariable tant que les deux points font partie d'un système rigide.

On définira donc a priori la *distance* de deux droites dans l'espace comme étant la grandeur complexe déterminée par les deux droites et qui reste invariable tant que les deux droites forment un système rigide. Chaque espèce de grandeur sera définie d'une manière analogue, c'est-à-dire d'une manière rappelant sa signification primitive; on obtiendra ainsi une géométrie de l'espace réglé où les grandeurs seront des quantités complexes; enfin on cherchera s'il existe une surface imaginaire dont la géométrie ponctuelle soit identique à cette géométrie de l'espace réglé.

En opérant ainsi, on trouve que cette surface est la sphère imaginaire, de sorte qu'on peut déduire de la géométrie sphérique une géométrie réglée, permettant en particulier de ramener l'étude du mouvement des corps solides à l'étude du mouvement d'une figure invariable sur une sphère, mouvement qui, on le sait, est analogue au mouvement plan.

I°.—*Principes de géométrie synthétique de l'espace réglé.*

Considérons une sphère imaginaire de rayon $i=\sqrt{-1}$ et faisons correspondre à chaque point de cette sphère une droite réelle de l'espace; l'espace réglé est alors la représentation de la surface de la sphère imaginaire. Toute courbe imaginaire tracée sur la sphère contient une double infinité de points; sa transformée dans l'espace réglé est ainsi une congruence de droites réelles.*

On supposera la sphère imaginaire fondamentale douée des mêmes propriétés géométriques qu'une sphère réelle et chacune de ces propriétés se traduira par une propriété analogue dans l'espace réglé. On mettra en regard l'un de l'autre les énoncés relatifs aux propriétés qui se correspondent, ainsi qu'il suit:

Sphère imaginaire.	*Espace réglé.*
Définition du cercle: Si l'on fixe un point de la surface de la sphère, cette surface ne peut plus glisser libre-	Définition de la congruence circulaire: Si l'on fixe (en position) une droite de l'espace, celui-ci ne peut plus

* Une congruence contient ainsi qu'une surface une double infinité d'éléments constitutifs et l'on pourrait se demander si la théorie des congruences est analogue à celle des surfaces, mais il y a cette différence que deux surfaces ont en commun une infinité de points, tandis que deux congruences ne possèdent qu'un nombre fini de droites communes. La congruence se rapproche donc par sa constitution de la courbe imaginaire.

ment sur elle-même, mais elle peut prendre un mouvement autour du point fixe, mouvement auquel on donne le nom de *rotation.* Pendant ce mouvement, chaque point de la sphère décrit sur sa surface une courbe qu'on appelle *petit cercle* ou simplement *cercle* de la sphère; le point fixe se nomme le *pôle* du cercle.

glisser librement sur lui-même, mais il peut tourner autour de la droite et glisser parallèlement à la direction de celle-ci; on donnera à ce mouvement le nom de *torsion.** Pendant ce mouvement (qui a deux degrés de liberté), chaque droite de l'espace supposé entraîné décrit une congruence qu'on appelera *congruence circulaire;* la droite fixe sera le *pôle* de la congruence ainsi définie.

Une congruence circulaire se compose donc des droites tangentes à un cylindre de révolution et faisant un angle constant avec les génératrices. L'axe du cylindre est le pôle de la congruence. Celle-ci admet un cône directeur de révolution dont l'axe coïncide avec celui du cylindre, de sorte que la surface focale de la congruence circulaire comprend, outre le cylindre, un cercle à l'infini dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Définition de la distance: Etant donnés deux points sur la sphère, on appelle *distance* de ces deux points une grandeur déterminée par leur position relative et qui reste invariable pendant le déplacement des points sur la sphère, tant que ces points appartiennent à une figure rigide.

En particulier, si $p + qi$ est la longueur de l'arc de grand cercle qui joint les deux points, l'expression la plus générale de leur distance sera:

Définition du distangle: Etant données deux droites dans l'espace, on nommera *distangle* des deux droites une grandeur (complexe) déterminée par leur position relative et qui reste invariable pendant le déplacement des droites, tant que celles-ci forment un système rigide.

En particulier, si P désigne la plus courte distance des deux droites et Q leur angle, l'expression la plus générale de leur distangle sera:

* Dans sa "Theory of Screws," R. S. Ball donne le nom de torsion (twist) à tout déplacement hélicoïdal; nous emploierons le mot de torsion pour désigner un mouvement à deux degrés de liberté comprenant tous les déplacements possibles autour d'une même droite fixe.

$f(p, q) + i\phi(p, q)$ puisque cette distance est déterminée lorsque $p + qi$ l'est.

On voit qu'un cercle de la sphère tel qu'il a été défini plus haut est aussi le lieu des points de la surface équidistants d'un point fixe, qui est le pôle du cercle, puisque l'arc $p + qi$ reste constant lorsque le point décrit le cercle.

Sur la sphère, on convient de mesurer la distance de deux points par l'arc de grand cercle joignant ces points, c'est-à-dire que l'on pose: $f(p, q) = p$ et $\phi(p, q) = q$; la distance des deux points est alors $p + qi$. La raison de ce choix est qu'un grand cercle est la seule courbe sphérique qui puisse servir à mesurer la distance de deux quelconques de ses points; autrement dit la seule courbe pour laquelle on ait:

$$f\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) + i\phi\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[f(p, q) + i\phi(p, q)\right]$$

quel que soit n.

$F(P, Q) + I.\Phi(P, Q)$, expression dans laquelle I est un symbole analogue à i ou $\sqrt{-1}$; en effet ce distangle est déterminé lorsqu'on se donne P et Q.

On voit qu'une congruence circulaire est aussi le lieu des droites de l'espace qui forment un distangle constant avec une droite fixe, appelée pôle, puisque P et Q restent constants lorsque la droite décrit la congruence.

Dans l'espace réglé, on conviendra de prendre pour mesure du distangle de deux droites une expression de la forme: $F(P, Q) + I.\Phi(P, Q)$, en assujetissant les fonctions F et Φ à satisfaire à la condition:

$$F\left(\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}\right) + I.\Phi\left(\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[F(P, Q) + I.\Phi(P, Q)\right]$$

quel que soit n. Il en résulte que F et Φ doivent être des fonctions linéaires homogènes de P et de Q; le distangle des deux droites est donc nécessairement de la forme:

$$(aP + bQ) + I(cP + dQ),$$

a, b, c, d étant des constantes. Mais comme P est une longueur et Q un angle, l'expression $aP + bQ$ n'a de sens que si a ou b est nul; on devra donc poser par exemple $b = 0$ et $c = 0$; enfin on peut sans perte de généralité supposer $a = 1$ et $d = 1$.

Ainsi étant données deux droites qui font entre elles un angle Q et dont la plus courte distance est P, on dira que ces deux droites font entre elles un distangle égal à $P + Q.I$.* On verra du reste que cette expression est bien celle qui correspond à la longueur d'un arc de grand cercle sur la sphère.

La distance de deux points sur la sphère a une infinité de valeurs comprises dans la formule $p + (q + 2k\pi)i$, où k est un entier quelconque, puisque $2\pi i$ est la longueur totale d'un grand cercle sur la sphère de rayon i.

Définition du grand cercle : Sur la sphère de rayon i on appelle *grand cercle* tout cercle dont le rayon mesuré sur la sphère est égal à $\frac{\pi}{2}\, i$.

Le distangle de deux droites a une infinité de valeurs comprises dans la formule : $P + (Q + 2K\pi)\, I$, où K est un entier quelconque, puisque l'angle Q a une infinité de valeurs.

Définition de la congruence rectiligne : On appelera *congruence rectiligne* ou *recticongruence* une congruence circulaire dont le rayon est égal à $\frac{\pi}{2}\, I$.

Une recticongruence est donc le lieu des droites formant avec une droite fixe un distangle constant $P + QI$, égal à $\frac{\pi}{2}\, I$, ce qui exige $P = 0$ et $Q = \frac{\pi}{2}$; donc toute droite rencontrant la droite fixe sous un angle droit fait partie du lieu ; cette droite fixe est d'ailleurs le pôle de la recticongruence. On voit aussi qu'une recticongruence est une congruence linéaire, car sa surface focale se compose 1° de la droite fixe, 2° de la droite de l'infini dans le plan directeur de la congruence.

Deux points sont diamétralement opposés sur la sphère de rayon i, lorsque leur distance est égale à πi.

Deux droites seront dites *diamétralement opposées* lorsque leur distangle $P + QI = \pi I$, c'est-à-dire lorsque $P = 0$ et $Q = \pi$.

Ainsi pour passer d'une droite AB à la droite diamétralement opposée, il suffit de retourner la droite AB bout pour bout, ce qui donne la droite BA. Il en résulte que lorsqu'on fixe une droite de l'espace, on fixe en même temps la

* Comme P est une longueur et Q un angle, le principe d'homogénéité montre que le symbole I doit représenter une longueur, et comme i est le rayon de la sphère imaginaire on peut considérer I comme le rayon de courbure de l'espace réglé, c'est-à-dire comme une unité absolue de longueur. C'est cette unité absolue, qu'il est impossible de trouver, qui jouerait en géométrie un rôle analogue à celui de la quantité i ou $\sqrt{-1}$ en algèbre.

droite diamétralement opposée ; toute congruence circulaire a donc deux pôles, qui sont diamétralement opposés.

Deux points quelconques pris sur la sphère déterminent un grand cercle.

Deux droites quelconques déterminent une recticongruence.

En effet pour déterminer une recticongruence, il suffit de déterminer son pôle : or ce pôle doit rencontrer à angle droit les deux droites données, il coïncide donc avec leur perpendiculaire commune.

Il y a indétermination si les deux droites coïncident ou sont diamétralement opposées.*

Deux grands cercles se coupent toujours en deux points diamétralement opposés.

Deux recticongruences ont toujours en commun la perpendiculaire commune à leurs pôles.

Cette perpendiculaire pouvant être prise dans les deux sens, on peut dire que deux recticongruences se coupent suivant deux droites diamétralement opposées.

Deux grands cercles déterminent un angle dièdre, angle qui est mesuré par la distance de leurs pôles divisée par le rayon i de la sphère.

Deux recticongruences déterminent une grandeur (complexe) qu'on nommera *codistangle* et qui sera mesurée par le distangle de leurs pôles divisé par I.

On dira que deux recticongruences sont perpendiculaires l'une sur l'autre lorsque leur codistangle est égal à $\frac{\pi}{2}$. Si donc $P + QI$ est le distangle formé par les pôles des deux recticongruences, on devra avoir $\frac{P + QI}{I} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire : $P = 0$ et $Q = \frac{\pi}{2}$; ainsi deux recticongruences sont perpendiculaires lorsque leurs pôles se rencontrent à angle droit.

Il en résulte que pour mener par une droite A une recticongruence perpendiculaire à une recticongruence X (donnée par son pôle), on construira la perpendiculaire commune à la droite A et au pôle de X ; cette perpendiculaire sera le pôle de la congruence cherchée.

---

* Le cas où les deux droites seraient parallèles sera considéré plus loin.

Deux recticongruences perpendiculaires sur une troisième se rencontrent toujours au pôle de celle-ci ; lorsque deux recticongruences sont perpendiculaires, le pôle de l'une est sur l'autre ; trois recticongruences dont les pôles forment un trièdre trirectangle sont deux à deux perpendiculaires l'une sur l'autre et le pôle de l'une est la droite d'intersection des deux autres ; si trois droites forment un trièdre trirectangle, l'une quelconque d'entre elles est le pôle de la recticongruence passant par les deux autres, etc.

Soit $P + QI$ le distangle de deux droites A et B ; décrivons autour de leur perpendiculaire commune un cylindre de révolution avec un rayon égal à l'unité et traçons sur ce cylindre une hélice rencontrant les droites A et B aux points a et b ; si l'on désigne par ρ la longueur de l'arc d'hélice ab et par ϕ l'angle sous lequel cette hélice coupe les génératrices, on a : $\rho \cos \phi = P$ et $\rho \sin \phi = Q$ d'où :

$$P + QI = \rho (\cos \phi + I \sin \phi).$$

On dira que ρ est le module et ϕ l'argument du distangle des deux droites.

Il est nécessaire de déterminer avec précision les signes de P et de Q. On considérera comme positif un certain sens de rotation autour de la perpendiculaire commune aux deux droites A et B. Si l'on fait subir alors à la droite A un mouvement de torsion de manière à ce qu'elle vienne coïncider avec B, l'angle Q dont tourne la droite A sera compté positivement ou négativement suivant qu'il est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif. Le signe de Q étant ainsi déterminé, on donnera à P le même signe ou un signe contraire à celui de Q suivant que le mouvement de torsion est dextrogyre ou lévogyre. Avec ces conventions, les distangles formés par une droite de l'espace avec deux droites diamétralement opposées sont bien supplémentaires, car leur somme est égale à πI.

Etant données deux droites A et B, si l'on divise leur plus courte distance P en deux parties égales, et que par le point ainsi obtenu on mène une droite C bissectant l'angle Q formé par les droites A et B, on a : distangle (AC) $=$ distangle $(CB) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} I$. La droite C est donc la *droite milieu* du distangle (AB) ; elle appartient bien du reste à la recticongruence (AB). Comme l'angle Q a deux bissectrices et que chacune peut être prise dans les deux sens, les deux droites A et B possèdent quatre droites milieux différant entre elles d'un quadrant $\left(\frac{\pi}{2} I\right)$; cela tient à ce que les deux droites A et B représentent

en réalité quatre droites, puisque chacune d'elles peut être prise dans les deux sens. On peut donc former avec A et B quatre distangles différents, dont chacun a sa droite milieu.

Trois recticongruences forment une figure qu'on nommera *tridistangle*; cette figure a trois arêtes, qui sont les droites d'intersection des trois congruences, et possède six éléments, savoir: trois codistangles formés par les congruences et trois distangles déterminés par les arêtes. Les trois arêtes d'un tridistangle et les trois pôles des congruences qui en constituent les côtés forment un hexagone gauche tel que chacun de ses six côtés est la perpendiculaire commune aux deux côtés adjacents; les trois pôles sont donc vis-à-vis des trois arêtes dans une position réciproque, c'est-à-dire que si l'on prend ces trois pôles (avec un sens convenable) comme arêtes d'un nouveau tridistangle, les trois arêtes deviennent les pôles des côtés. Or cette permutation revient à remplacer chaque recticongruence par son pôle et chaque arête par la recticongruence dont elle est le pôle; on dira donc que les deux tridistangles sont *polaires* l'un de l'autre. La théorie des tridistangles polaires est identique à celle des triangles sphériques polaires.

Les généralités qui précèdent suffisent pour indiquer la nature de la correspondance que nous avons cherché à établir entre les droites de l'espace et les points d'une sphère imaginaire, et l'on peut dès à présent appliquer à l'espace réglé les principaux théorèmes de géométrie sphérique. Nous nous bornerons du reste aux théorèmes qui concernent plus spécialement l'étude du mouvement des corps solides.

Le lieu des points de la sphère équidistants de deux points donnés est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle joignant les points donnés.

Le lieu des droites formant le même distangle avec deux droites données A et B est une recticongruence X passant par la droite milieu du distangle (AB) et perpendiculaire à la recticongruence (AB).

Le pôle de la recticongruence X s'obtient en menant par le point milieu de la perpendiculaire commune aux droites A et B une droite normale au plan déterminé par cette perpendiculaire commune et la droite milieu du distangle (AB).

Si par les points milieux des côtés d'un triangle sphérique, on élève des

Si par les droites milieux des côtés d'un tridistangle, on élève des

grands cercles perpendiculaires à ces côtés, les trois grands cercles ainsi obtenus concourent en un même point, qui est le pôle du petit cercle circonscrit au triangle.

recticongruences perpendiculaires à ces côtés, les trois congruences ainsi obtenues passent par une même droite, qui est le pôle de la congruence circulaire circonscrite au tridistangle.

Ce théorème, qui résulte du précédent, montre que trois droites déterminent une congruence circulaire dont le pôle se trouve aisément.

Deux tridistangles sont évidemment égaux (ou symétriques) lorsqu'ils ont soit leurs trois distangles, soit leurs trois codistangles égaux chacun à chacun. Le second cas se ramène au premier au moyen du tridistangle polaire.

A toute figure sphérique de forme invariable correspond dans l'espace une figure composée de droites formant un système rigide, ou si l'on veut un corps solide ; donc pour fixer un corps solide il suffit de fixer la position de deux de ses droites (non parallèles), puisque deux points déterminent la position d'une figure sphérique. On peut alors déduire le théorème fondamental de géométrie cinématique dans l'espace, du théorème qui lui correspond sur la sphère :

Si une figure sphérique subit un déplacement quelconque sur la sphère, on peut la faire passer de sa position initiale à sa position finale au moyen d'une seule rotation autour d'un certain point pris comme pôle. Pendant la rotation tous les points de la figure décrivent des cercles concentriques dont le pôle commun est le centre de rotation.

Si un corps solide subit un déplacement quelconque dans l'espace, on peut le faire passer de sa position initiale à sa position finale au moyen d'une seule torsion autour d'une certaine droite fixe prise comme pôle. Pendant la torsion, toutes les droites invariablement reliées au solide décrivent des congruences circulaires concentriques dont le pôle commun se nommera *l'axe de torsion.*

La démonstration de ce théorème est la même dans le cas de l'espace que dans celui de la sphère puisqu'elle n'implique que les théorèmes précédents, il est donc inutile de la reproduire, mais on peut remarquer que la construction ordinaire du centre de rotation sur la sphère (ou dans le plan) conduit à une construction identique de l'axe de torsion dans l'espace : en effet, soient A et B deux droites quelconques du corps solide dans sa position initiale et A', B' les mêmes droites dans la position finale du corps (Fig. 1) ; par le point k, milieu de la plus

courte distance K des droites A et A' menons une droite M bissectant l'angle

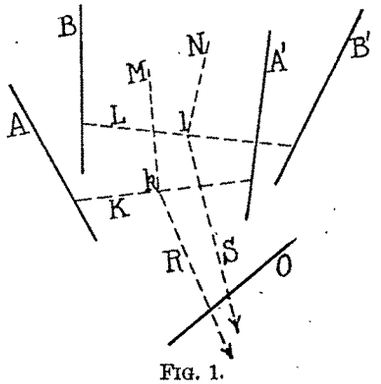


FIG. 1.

(AA') et par le point l milieu de la plus courte distance L des droites B et B', menons une droite N bissectant l'angle (BB') ; puis par le point k élevons une droite R normale au plan (KM) et par le point l une droite S normale au plan (LN) ; la perpendiculaire O commune aux droites R et S sera l'axe de torsion cherché, car la droite O est la droite d'intersection de deux recticongruences ayant respectivement pour pôles les droites R et S, c'est-à-dire de deux recticongruences respectivement perpendiculaires aux recticongruences (AA') et (BB') et passant par leurs droites milieux.

Avant de continuer l'étude du mouvement des corps solides, il est nécessaire d'étudier la constitution d'une congruence dans le voisinage d'une de ses génératrices et de la comparer à celle d'une courbe sphérique imaginaire dans le voisinage d'un de ses points.

Sturm a montré que toutes les génératrices d'une congruence voisines d'une génératrice C rencontrent deux mêmes droites T et T', perpendiculaires à la droite C et passant par les foyers de cette droite. Or l'ensemble des droites de l'espace rencontrant les deux droites T et T' forment une congruence linéaire qui contiendra la génératrice C ainsi que toutes les génératrices voisines, de la congruence (C) ; on peut donc dire que la congruence linéaire des droites qui s'appuient sur T et T' est la congruence linéaire tangente à la congruence (C) le long de la droite C. Si maintenant l'on fait tourner les droites T et T' d'un angle droit autour de la génératrice C, on obtient deux nouvelles droites N et N' qui determinent une congruence linéaire identique à la précédente et qu'on peut appeler la congruence linéaire normale à la congruence (C) le long de la droite

C.* Les droites N et N' passent par les foyers de la génératrice C et sont respectivement normales aux deux nappes de la surface focale de la congruence (C).

A toute congruence de droites dans l'espace correspond sur la sphère imaginaire une congruence de points, c'est-à-dire une double infinité de points, mais ces points ne forment pas en général une courbe sphérique proprement dite. Par analogie avec les courbes planes imaginaires, on dira qu'une courbe sphérique est analytique si elle admet en chaque point un grand cercle tangent bien déterminé. Il en résulte qu'aux courbes analytiques de la sphère correspondent dans l'espace les congruences qui admettent une recticongruence tangente pour chacune de leurs génératrices; les congruences jouissant de cette propriété seront appelées *congruences analytiques.*

Pour qu'une congruence (C) soit analytique, il faut et il suffit que la congruence linéaire tangente le long d'une génératrice quelconque C soit une recticongruence, c'est-à-dire que les deux droites T et T' soient rectangulaires et que l'une d'elles T' soit à l'infini. Or, pour que cela ait lieu, il faut: 1°) que la congruence (C) soit une congruence de normales à une surface S, car alors les plans focaux (CT) et (CT') sont rectangulaires; 2°) que la surface S soit une surface développable, car alors une des centres de courbure principaux de S est toujours à l'infini et comme ce centre de courbure est précisément un des foyers de la droite C, la droite T' qui passe par ce foyer sera toute entière à l'infini. En résumé: *toute congruence analytique est une congruence de normales à une surface développable et réciproquement.*

Tout plan normal à la surface développable S et passant par une de ses génératrices contient une infinité de droites normales à S et qui sont toutes parallèles entre elles; si l'on appelle *plan réglé* l'ensemble des droites d'un plan parallèles à une direction donnée dans ce plan, on peut dire que toute congruence analytique (C) se compose d'une série de plans réglés normaux à une surface développable S. L'enveloppe de ces plans normaux est une autre surface développable (Σ), qui forme l'une des nappes de la surface focale de la congruence (C). D'ailleurs l'autre nappe est une courbe rejetée à l'infini, puisque chaque

*On voit qu'une congruence, son élément linéaire tangent et son élément linéaire normal sont tous trois de même nature, ce qui montre une fois de plus la différence qui existe entre la constitution d'une congruence de droites et celle d'une surface de points. D'un autre côté, en chaque point d'une courbe imaginaire tracée sur une surface l'élément tangent et l'élément normal sont bien de même nature que la courbe elle-même.

génératrice a un de ses foyers à l'infini et que toutes les génératrices situées dans un même plan réglé ont même point à l'infini ; ceci revient à dire que toute congruence analytique admet un cône directeur. Si l'on fait rouler un plan réglé P sur une surface développable (Σ), les réglures du plan P resteront normales à une autre surface développable S, c'est-à-dire qu'elles engendreront une congruence analytique ; le plan réglé peut du reste, pendant ce roulement, glisser sur lui-même d'un mouvement quelconque de translation sans cesser d'engendrer la même congruence, car les réglures du plan P restent les mêmes tant que ce plan ne tourne pas sur lui-même. On dira donc pour abréger que le plan P roule sur (Σ) en glissant parallèlement.

Si le glissement est fonction du roulement, chaque réglure du plan P décrira dans la congruence une certaine surface réglée dépendant de la fonction donnée. En particulier, s'il y a glissement sans roulement, la surface réglée engendrée sera le plan P lui-même, tandis que s'il y a roulement sans glissement, chaque réglure engendre une surface développable dont l'arête de rebroussement est sur (Σ) ; on connaît donc les deux systèmes de développables de la congruence analytique.

Pour définir une congruence analytique (C), il suffit de se donner sa développable focale (Σ) et la direction C des réglures d'un plan P tangent à cette surface focale, (Fig. 2). La droite Σ représente la génératrice de la surface (Σ), c'est-à-dire la caractéristique du plan P. Pour avoir le pôle de la recticongruence tangente à la congruence (C) le long de la droite C, on mènera dans le

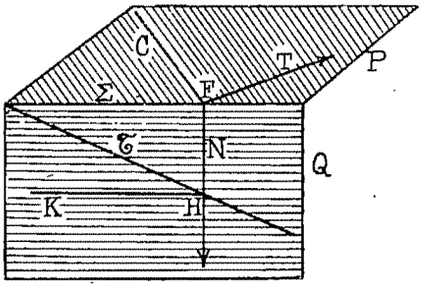


FIG. 2.

plan P une droite T perpendiculaire à C et passant par le point F, où la droite C touche la surface focale. Le pôle de la recticongruence normale à la congruence (C) le long de la génératrice C est la droite N normale à la surface (Σ) au point F; les trois droites C, T et N forment un trièdre trirectangle.

Les congruences circulaires sont des congruences analytiques, dont la développable focale (Σ) est un cylindre de révolution. Il en résulte que toutes les recticongruences normales sont des rayons, car les normales N rencontrent toutes l'axe du cylindre à angle droit ; donc dans une congruence circulaire, la tangente est perpendiculaire au rayon.

La congruence (C) et sa recticongruence tangente T ont en commun tout le plan réglé P, mais il n'y a contact que pour la droite C ; les congruences analytiques occuppent donc parmi les congruences une place analogue à celle des surfaces réglées parmi les surfaces, en ce sens que le plan tangent à une surface réglée a en commun avec la surface tous les points d'une génératrice, quoiqu'il n'y ait contact qu'en un seul de ces points.

Deux congruences analytiques (C) et (C') ayant une génératrice commune D, sont tangentes entre elles lorsqu'elles ont même recticongruence tangente le long de D. Dans ce cas, les surfaces focales (Σ) et (Σ') des deux congruences sont tangentes entre elles au foyer de la droite D, sans pour cela avoir de génératrice commune ; toutes les droites parallèles à D, qui se trouvent dans le plan tangent commun aux surfaces focales, appartiennent aux deux congruences,* mais il n'y a contact que pour la droite D.

Etant donnée une congruence analytique (C), toute congruence circulaire qui lui est tangente le long d'une de ses génératrices C (Fig. 2) aura son pôle sur la recticongruence N normale à (C), car la surface focale de cette congruence circulaire est un cylindre de révolution tangent en F à la surface développable (Σ), en d'autres termes l'axe de ce cylindre rencontre à angle droit la normale N. Or, parmi tous les cylindres de révolution tangents en F à la surface Σ, il en est un de remarquable : en effet, Meusrier a montré qu'il existe en chaque point d'une surface quelconque, deux tores osculateurs dont les axes sont des droites parallèles au plan tangent, situées dans les plans principaux et passant par les centres de courbure principaux de la surface ; or dans le cas où celle-ci est une surface développable (Σ) un de ces axes est à l'infini de sorte que les deux tores osculateurs dégénèrent en un même cylindre de révolution osculateur ; l'axe de ce cylindre est donc une droite K parallèle à la génératrice Σ et passant par le centre de courbure principal H de la développable. La congruence circu-

* On voit maintenant le rôle particulier que jouent les droites parallèles et pourquoi dans les théorèmes précédents concernant un système de deux droites on doit toujours exclure le cas où les droites seraient parallèles.

laire ayant pour pôle la droite K et passant par la droite C sera appelée *congruence circulaire osculatrice* de la congruence (C). La droite K est donc *l'axe de courbure* et le distangle (KC) le *rayon de courbure* de la congruence (C).

Deux congruences analytiques sont dites *polaires réciproques* lorsque les génératrices de l'une sont les pôles des recticongruences tangentes à l'autre. D'après cette définition, la congruence (C) lieu des droites C de la Fig. (2) a pour congruence polaire la congruence (T) lieu des droites T; les congruences (C) et (T) sont évidemment réciproques. On voit de plus que deux congruences polaires ont la même surface focale (Σ) et ne diffèrent que par la direction des réglures du plan générateur P. Comme les droites C et T se correspondent une à une, à toute surface réglée de la congruence (C) correspondra une surface réglée polaire dans la congruence (T); ces surfaces polaires sont précisément les surfaces qui ont été considérées par Bour puis par Chasles sous le nom de surfaces réciproques, en effet les génératrices de l'une sont les perpendiculaires communes aux génératrices consécutives de l'autre, puisque la droite T par exemple rencontre à angle droit toutes les génératrices de la congruence (C) voisines de la droite C. En général, étant donné un nombre fini ou infini de droites, en prenant les perpendiculaires communes à deux droites consécutives, on obtient un nombre égal de droites formant la figure polaire réciproque de la figure donnée.

On dira qu'une congruence (K) est la *développée* d'une congruence (C) lorsque les recticongruences tangentes à (K) sont normales à (C); réciproquement (C) est une *développante* de (K). Soit comme précédemment (Σ) la surface focale de (C) (Fig. 2), les droites N normales à (Σ) sont les pôles des recticongruences normales à (C) et par conséquent des recticongruences tangentes à la développée de (C), donc cette développée est la congruence polaire de la congruence des normales à la surface (Σ); cette surface étant développable, ses normales N forment une congruence analytique, c'est-à-dire une série de plans Q normaux à (Σ) et réglés parallèlement à N; tous ces plans normaux enveloppent une nouvelle surface développable $(\mathfrak{T})$ dont la génératrice $\mathfrak{T}$ passe par le centre de courbure principal H, on obtiendra donc la congruence polaire de la congruence (N) en menant par chaque point H une droite K perpendiculaire à la droite N et située dans le plan Q; or la droite K ainsi obtenue est précisément l'axe de courbure de la congruence (C), donc la développée d'une congruence analytique est le lieu de ses axes de courbure. On remarquera que les droites K, N, $\mathfrak{T}$ et

le plan Q jouent vis-à-vis de la congruence (K) le même rôle que les droites C, T, Σ et le plan P vis-à-vis de la congruence (C). Dans le cas d'une congruence circulaire, la développée se réduit à une droite qui est le pôle de la congruence.

Lorsqu'une congruence analytique se déplace dans l'espace réglé, de telle manière que sa position dépende d'un paramètre (complexe), le lieu des droites d'intersection de deux positions infiniment voisines de la congruence est la congruence *enveloppe* de la congruence mobile. Ainsi par exemple, l'enveloppe d'une recticongruence mobile sera le lieu des perpendiculaires communes à deux positions consécutives du pôle de la recticongruence ; si ce pôle décrit une congruence analytique, cette enveloppe en sera la congruence polaire. On voit d'après cela que la développée d'une congruence analytique est aussi l'enveloppe de ses normales.

On appelera *arc élémentaire* d'une congruence le distangle formé par deux génératrices infiniment voisines. Soient C et D deux génératrices quelconques d'une congruence analytique ; il existe une infinité de surfaces réglées appartenant à la congruence et passant par les droites C et D ; les génératrices consécutives de chacune de ces surfaces forment une série d'arcs élémentaires entre C et D ; or la somme de ces arcs élémentaires est indépendante de la surface réglée qui mène de C à D ; c'est cette somme qui ne dépend que de ses deux limites qu'on appelera l'*arc* de la congruence entre les droites C et D ou simplement l'arc CD. Pour montrer que l'arc est indépendant de la surface réglée qui sert à le mesurer, considérons la congruence comme engendrée par un plan réglé P qui dans sa position initiale passe par la droite C ; lorsque ce plan roule et glisse parallèlement sur la surface focale (Σ), la droite C engendre dans la congruence une surface réglée qui dépend de la loi reliant le glissement au roulement ; en particulier, si le plan P glisse sans rouler, la droite C se meut parallèlement à elle-même dans le plan P ; elle engendre donc une série de distangles élémentaires $dU + I.dV$ pour lesquels $dV = 0$; la somme de ces distangles est donc $\int dU = U$; si au contraire, le plan P roule sans glisser, la droite C engendre une surface développable, c'est-à-dire une série de distangles élémentaires $dU + I.dV$ pour lesquels on a constamment $dU = 0$, puisque la plus courte distance entre deux génératrices consécutives de la développable est nulle ; la somme de ces distangles est donc $\int I.dV = I \int dV = I.V$. Par suite, si le plan

P roule et glisse en même temps, la somme des distangles ou arcs élémentaires décrits par la droite C sera $U + I.V$, U étant le distangle dû au glissement total et $I.V$ le distangle dû au roulement total ; l'arc $U + I.V$ ne dépend donc que du mouvement total, c'est-à-dire des deux droites C et D qui forment ses extrémités.

Le distangle (CD) forme la *corde* de l'arc (CD) ; lorsque l'arc coïncide avec sa corde la congruence ne peut être qu'une recticongruence.

II°.—*Principes de géométrie cinématique de l'espace réglé.*

Etant données deux positions arbitraires d'un corps solide, on a vu qu'on peut faire passer le corps de la première position à la seconde par un simple mouvement de torsion autour d'une droite fixe. Si les deux positions du corps sont infiniment voisines, la torsion n'a plus qu'un seul degré de liberté et peut être considérée comme un déplacement hélicoïdal élémentaire autour d'une droite fixe Δ. On peut donc décomposer le mouvement continu d'un corps solide en une série de déplacements hélicoïdaux élémentaires ; le lieu des axes Δ de ces déplacements est une surface réglée soit dans le corps soit dans l'espace fixe ; ces deux surfaces réglées se raccordent constamment le long de la droite Δ correspondante, de sorte que le mouvement du solide équivaut à un roulement continu de la première surface réglée sur la seconde, ce roulement étant accompagné à chaque instant d'un glissement suivant la génératrice de contact Δ. C'est ce roulement de deux surfaces réglées qui se raccordent, et qui glissent suivant leur droite de contact que Reuleaux a appelé *viration* des surfaces réglées. Lorsque le glissement est constamment nul, la viration est un simple roulement, qui n'est possible d'ailleurs que si les deux surfaces réglées sont applicables l'une sur l'autre.

Lorsque deux congruences (C) et (C') sont tangentes entre elles le long d'une droite Δ, toutes les surfaces réglées de (C) passant par Δ se raccordent chacune à chacune avec les surfaces réglées correspondantes de (C') ; en effet, si l'on prend un point m quelconque sur Δ et une surface réglée particulière de la congruence (C), on trouvera toujours dans la congruence (C') une surface tangente à la première au point m, et comme ces deux surfaces sont aussi tangentes entre elles aux foyers de la génératrice Δ, elles se raccordent. On peut donc faire virer toute surface réglée de (C) sur la surface réglée qui lui correspond dans (C') et si l'on suppose que la congruence (C) est entraînée toute entière dans chacune de ces virations, on aura défini un mouvement à deux degrés de

liberté qu'on appelera par extension la *viration* de la congruence mobile (C) sur la congruence fixe (C'). Les congruences (C) et (C') restent constamment tangentes et leur viration se compose d'une succession de torsions élémentaires autour de leur droite de contact, de même que le roulement des courbes sphériques se compose d'une série de rotations élémentaires autour de leur point de contact.

Pour que le mouvement soit défini, il faut que la congruence mobile reprenne la même position toutes les fois que la droite de contact redevient la même ; dans ce cas, les congruences (C) et (C') seront dites *applicables* l'une sur l'autre. Deux congruences analytiques quelconques sont toujours applicables l'une sur l'autre, car si on les fait virer l'une sur l'autre de manière que Δ soit la droite de contact dans leur position initiale et Δ_1 la droite de contact dans leur position finale, cette position finale sera la même quelles que soient les surfaces réglées ayant servi de base à la viration puisque la valeur de l'arc $(\Delta\Delta_1)$ est indépendante de la surface sur laquelle on le mesure.

Lorsque deux congruences analytiques virent l'une sur l'autre, toute droite de l'espace décrit une congruence trajectoire qui est analytique et la recticongruence normale à cette trajectoire passe à chaque instant par la droite de contact des deux congruences ; en effet la viration se compose d'une succession de torsions élémentaires, qui font décrire à la droite entraînée des éléments de congruence circulaire autour de la droite de contact ; cette dernière droite est ainsi à chaque instant l'*axe instantané de torsion.* En particulier, lorsqu'une recticongruence (N) (Fig. 2) vire sur une congruence analytique (K), toute droite C appartenant à (N) engendre une congruence (C) à laquelle (N) est constamment normale ; or (N) reste tangent à (K) donc (C) est une développante de (K). Comme la recticongruence (N) contient une double infinité de droites, on voit que toute congruence analytique a une double infinité de développantes ; toutes ces développantes sont des congruences *parallèles*, car elles interceptent partout le même distangle sur leur normale commune ; réciproquement des congruences parallèles ont la même développée.

Mouvement à deux degrés de liberté : Considérons un corps solide dont deux droites A et B (non parallèles) sont assujetties à décrire respectivement deux congruences analytiques (A) et (B). Le distangle (AB) formé par ces droites reste invariable ; par suite, étant donnée une position particulière de la droite A, on obtient la position correspondante de la droite B en prenant l'intersection de

la congruence trajectoire de B avec une congruence circulaire décrite autour de A comme pôle avec un rayon égal au distangle (AB).

Si l'on mène par deux droites correspondantes A et B des recticongruences normales à leurs congruences trajectoires, ces normales se coupent suivant une droite Δ; d'après ce qui a été dit, la congruence circulaire décrite autour de Δ comme pôle et passant par la droite A est tangente à la congruence (A), de même la congruence circulaire décrite autour de Δ et passant par B est tangente à (B). On peut donc pendant un temps très-court remplacer les congruences (A) et (B) par ces congruences circulaires tangentes, c'est-à-dire que le mouvement élémentaire à deux degrés de liberté que peut prendre le solide à partir de la position AB est une torsion élémentaire autour de la droite Δ; cette droite est l'axe instantané de torsion. Il en résulte: 1°) que pendant un temps infiniment court, toute droite D de l'espace décrit un élément de congruence circulaire autour de la droite Δ, c'est-à-dire que la recticongruence normale à la trajectoire de la droite D passe par l'axe instantané de torsion Δ et que la perpendiculaire commune à D et à Δ rencontre D en son foyer; 2°) que le lieu des droites Δ est une congruence (évidemment analytique) soit dans l'espace mobile soit dans l'espace fixe et que par suite le mouvement à deux degrés de liberté du corps solide, tel qu'il a été défini, peut être produit par la viration d'une congruence analytique (C) sur une autre congruence de même nature (C').

On voit que lorsque deux droites décrivent des congruences analytiques, il en est de même de toute autre droite; on dira dans ce cas que le mouvement est analytique. Si une congruence analytique M est entraînée dans le mouvement, elle enveloppera une certaine congruence et il est clair que les droites de contact de M avec son enveloppe s'obtiendront en menant par l'axe instantané de torsion des recticongruences normales à M. Il en résulte que des congruences parallèles ont pour enveloppe des congruences parallèles.

Tout ce qui précède montre que le mouvement analytique à deux degrés de liberté dans l'espace est ce qui correspond au mouvement le plus général d'une figure sphérique sur sa propre sphère, de sorte qu'on pourra utiliser cette correspondance pour résoudre des problèmes relatifs au mouvement dans l'espace qu'il serait souvent difficile de résoudre directement. Tel est le problème qui consiste à trouver l'axe de courbure de la congruence trajectoire décrite par une droite E quelconque de l'espace lorsqu'une congruence (C) vire sur une congruence (C'). Les congruences (C) et (C') étant analytiques, on peut traduire dans l'espace

réglé la construction géométrique de Savary qui donne le centre de courbure de la trajectoire d'un point dans le mouvement plan ou sphérique ; donc, si Δ désigne la droite de contact des congruences (C) et (C') et si K et K' désignent les axes de courbure de ces congruences, on élèvera par la droite Δ une recticongruence perpendiculaire à la recticongruence $(E\Delta)$, qui rencontrera la recticongruence (EK) suivant une certaine droite N; l'axe de courbure cherché sera alors la droite d'intersection des recticongruences $(E\Delta)$ et (NK'). La solution de ce problème n'exige, comme on le voit, que la construction d'un certain nombre de perpendiculaires communes à deux droites.*

De même, pour trouver l'axe de courbure de la congruence enveloppe d'une congruence analytique I entrainée dans le mouvement, on opérera comme s'il s'agissait d'un mouvement sphérique, en remarquant que l'axe de courbure de l'enveloppe de I est le même que celui de la congruence décrite par l'axe de courbure de I; on est donc ramené au problème précédent.

On peut citer comme exemple de mouvements analytiques les mouvements réalisés par certains systèmes articulés. On entend par *articulation* une charnière réunissant deux corps solides de telle manière que les deux corps puissent non-seulement tourner autour de l'axe de la charnière, mais aussi glisser l'un par rapport à l'autre le long de cet axe ; il en résulte que lorsqu'un corps est articulé sur un autre, les droites du premier corps ne peuvent plus décrire par rapport au second que des congruences circulaires autour de la charnière. Quatre corps solides étant articulés deux à deux au moyen de quatre charnières, dont les axes sont quatre droites quelconques A, B, C, D, si l'on fixe la position de deux axes adjacents tels que A et B, les deux autres axes C et D sont assujettis à décrire des congruences circulaires, par suite toute droite M reliée au corps solide (CD) décrira une congruence analytique, c'est-à-dire que le mouvement sera analytique. La normale à la congruence (M) est d'ailleurs la recticongruence joignant la droite M à la droite d'intersection des recticongruences (AC) et (BD).

Les mouvements analytiques, les seuls que nous ayons considérés jusqu'ici ; sont des cas particuliers du mouvement le plus général à deux degrés de liberté. Dans le cas général, les droites du corps en mouvement décrivent des congruences quelconques, mais le mouvement peut toujours être défini au moyen de

* La construction précédente n'a pas encore été démontrée directement dans l'espace et il est à désirer que son exactitude soit confirmée par un procédé direct.

deux congruences que sont assujetties à décrire deux droites particulières A et B.* Or la congruence (A) trajectoire de la droite A admet le long de cette droite une congruence linéaire normale dont les deux directrices N et N' sont, comme on l'a vu, les normales à la surface focale de (A) passant par les foyers de la génératrice A; la congruence (B) admet de même une congruence linéaire normale dont nous désignerons les directrices par P et P'; ces deux congruences linéaires se coupent suivant deux droites Δ et D qui s'appuient sur les quatre directrices N, N', P, P'. Or toute rotation élémentaire du corps solide effectuée soit autour de D, soit autour de Δ, a pour effet de déplacer à la fois la droite A dans la congruence (A) et la droite B dans la congruence (B): car une telle rotation ne peut déplacer chaque foyer de la droite A par exemple que dans le plan normal à la directrice correspondante, N ou N' (puisque cette directrice rencontre les deux axes de rotation); mais ce plan normal est le plan tangent à la surface focale de (A), donc la droite A reste bien bitangente à cette surface focale pendant la double rotation. On prouvera de même que la droite B se déplace dans la congruence (B). En résumé, tout mouvement élémentaire du solide compatible avec les liaisons peut être produit par une double rotation autour des droites D et Δ.

Dès lors, si M est une droite quelconque du corps solide, sa congruence trajectoire se confond dans le voisinage de M avec la congruence que l'on obtiendrait en faisant tourner la droite M simultanément autour de D et Δ de toutes les manières possibles. Une pareille congruence ne diffère d'une congruence circulaire qu'en ce que ses deux pôles D et Δ sont à distance finie tandis que pour la congruence circulaire une des deux droites D et Δ est à l'infini dans un plan perpendiculaire à l'autre; aussi les propriétés de ces deux sortes de congruences sont-elles analogues en particulier les normales à ces congruences passent toutes par leurs pôles D et Δ; par suite la normale à la congruence trajectoire de la droite M passera aussi par D et Δ, c'est-à-dire que dans le mouvement le plus général à deux degrés de liberté, les congruences linéaires normales aux trajectoires de toutes les droites de l'espace ont pour intersection commune les deux droites D et Δ.†

---

*Cela revient à assujettir chacune des droites A et B à rester tangente à deux surfaces données.

†Ces droites sont évidemment les mêmes que les droites D et Δ qui résultent du théorème de Schoenemann-Mannheim, lorsque le mouvement est défini au moyen des surfaces trajectoires que quatre points du corps solide doivent décrire.

Si l'on construit les droites D et Δ pour toutes les positions du corps solide, les droites D formeront une congruence et les droites Δ en formeront une autre, de sorte que le lieu de la droite D (ou Δ) est une congruence, soit dans l'espace fixe soit dans le corps solide. On pourrait donc considérer le mouvement le plus général à deux degrés de liberté comme produit par une sorte de viration des deux congruences lieux de la droite D (ou de la droite Δ) dans l'espace fixe et dans l'espace mobile.

Comme ces congruences doivent reprendre la même position toutes les fois que le corps solide revient lui-même à la même position, elles doivent être applicables l'une sur l'autre.

Mouvement à un seul degré de liberté : Contrairement à ce qui a lieu pour le mouvement à deux degrés de liberté, le mouvement le plus général d'un corps solide qui ne possède qu'un degré de liberté est toujours un mouvement analytique. Ceci est une conséquence du théorème suivant : étant donnée une surface réglée quelconque il existe toujours une congruence analytique et une seule contenant la surface donnée.

En effet, considérons une congruence (C) engendrée par un plan réglé P qui roule sur une surface développable (Σ) (Fig. 2). Comme la droite T est perpendiculaire commune à toutes les génératrices de la congruence voisines de la droite C, le point F est le point central de toutes les surfaces réglées qui passent par C et qui appartiennent à la congruence, c'est-à-dire que la surface focale (Σ) est le lieu des lignes de striction de toutes les surfaces réglées de (C). Comme de plus les génératrices de (C) sont tangentes à (Σ), tous les plans centraux de ces surfaces réglées sont aussi tangents à (Σ). Dès lors il suffit d'une seule surface réglée S pour déterminer complétement une congruence analytique, car la surface focale (Σ) de cette congruence est l'enveloppe des plans centraux de la surface S et la direction des réglures du plan P tangent à (Σ) est la même que celle de la génératrice de S qui se trouve dans le plan P considéré.

Ceci posé, on voit immédiatement que tout mouvement à un degré de liberté est analytique, car un tel mouvement peut toujours être produit par la viration d'une certaine surface réglée S sur une autre surface réglée S' ; soient (C) et (C') les congruences analytiques contenant respectivement S et S', la viration de S sur S' fait partie de la viration de (C) sur (C'), on peut donc considérer tout mouvement à un degré de liberté comme faisant partie d'un mouvement analytique à deux degrés de liberté et cela n'est possible que d'une seule

manière. L'étude des mouvements à un degré de liberté est donc ramenée à l'étude des mouvements analytiques, et c'est ce qui fait l'importance de ceux-ci. En effet, quoique les mouvements à un degré de liberté soient les seuls réalisables, ces mouvements considérés en eux-mêmes ne sont pas susceptibles d'une théorie géométrique complète : car pour définir la position d'un solide, il faut définir celle de deux droites d'ailleurs quelconques, invariablement reliées au corps, mais pour définir un mouvemeut arbitraire du solide, on ne peut pas se donner arbitrairement deux surfaces réglées et astreindre les deux droites à les décrire, car ces deux surfaces doivent satisfaire à certaines conditions. Il en serait encore de même si l'on définissait la position du solide au moyen de trois points, car ces trois points ne peuvent pas décrire trois courbes trajectoires données arbitrairement. De là un défaut de généralité dans les lois du mouvement, qui ne disparaît que lorsqu'on donne deux degrés de liberté au corps solide ; d'autre part, pour que l'on puisse déduire la théorie du mouvement ordinaire de celle du mouvement à deux degrés de liberté, il faut qu'à tout mouvement de la première espèce ne corresponde qu'un mouvement bien déterminé de la seconde et dont le premier fasse partie.

Les mouvements analytiques sont les seuls qui remplissent ces conditions, et comme tout mouvement de cette nature revient à la viration de deux congruences analytiques l'une sur l'autre, il est nécessaire de se rendre compte de la manière dont cette viration a lieu. On peut définir la viration des congruences, comme le roulement des courbes, en remarquant qu'une des congruences se déplace en restant tangente à l'autre, de telle sorte que les arcs qui ont subi le contact restent constamment égaux entre eux.

Lorsqu'une congruence analytique vire sur une autre, on peut à chaque instant remplacer chacune des congruences par la congruence circulaire osculatrice, sans altérer le mouvement de viration. On peut donc prendre comme type du mouvement de viration, le mouvement produit par une congruence circulaire (C) qui vire sur une autre congruence circulaire (C') ; toute droite de la congruence mobile (C) engendre une congruence qui sera dite *épicycloïdale ;* si la congruence (C) est une recticongruence $\left(\text{ce qui a lieu lorsque son rayon est égal à } \frac{\pi}{2} I\right)$ les génératrices de (C) décrivent des développantes de la congruence circulaire (C') ; si au contraire la congruence (C') est une recticongruence, on dira que toute droite de (C) décrit une *congruence cycloïdale.*

Soit $r + sI$ le rayon de la congruence (C), $r' + s'I$ celui de (C') ; dans leur position initiale les deux congruences sont tangentes le long d'une droite Δ dont le foyer est F (Fig. 3), c'est-à-dire que le cylindre (Σ) de rayon r qui forme la surface focale de (C) est tangent en F au cylindre (Σ') de rayon r' qui forme la surface focale de (C') ; de plus le plan tangent commun aux deux cylindres contient Δ et touche ces cylindres suivant deux droites Σ et Σ' qui passent par le point F et font respectivement avec Δ les angles donnés s et s'. Le plan P réglé parallèlement à Δ est commun aux deux congruences circulaires.

La viration élémentaire de (C) sur (C') consiste en une torsion infiniment petite autour de la droite Δ ; parmi tous les déplacements hélicoïdaux qui font partie de cette torsion, il y en a un qui consiste en un simple glissement le long de Δ et un autre qui consiste en une simple rotation autour de Δ ;

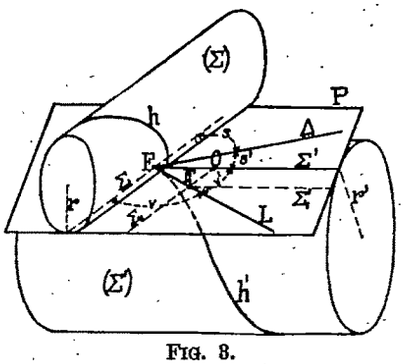


FIG. 3.

tous les autres déplacements ne sont que des combinaisons de ces deux déplacements particuliers. Il en résulte que parmi les surfaces réglées de (C) et de (C') qui virent l'une sur l'autre à partir de la position initiale Δ, il en existe toujours une paire qui glissent l'une sur l'autre sans rouler et une autre paire qui roulent l'une sur l'autre sans glisser ; de plus la viration de toutes les autres paires de surfaces réglées qui se raccordent le long de Δ, n'est qu'une combinaison de ces deux virations particulières. Supposons donc que la congruence (C) glisse le long de la droite Δ sans rouler ; le cylindre (Σ) entraîné dans le mouvement glisse sans rouler sur le plan P et sa droite de contact Σ se déplace parallèlement à elle-même tandis que la droite Σ' reste fixe ; le point F se déplace donc sur Σ', c'est-à-dire que les congruences (C) et (C') admettent successivement pour droite de contact les différentes réglures du plan P. Ainsi lorsque deux congruences analytiques glissent l'une sur l'autre sans rouler, les surfaces

qui subissent le glissement sont toujours des plans réglés pour chacune des congruences ; ce glissement a lieu parallèlement aux réglures Δ, de sorte qu'il fait décrire à toute droite de l'espace un plan parallèle à Δ.

Considérons maintenant le roulement sans glissement de (C) sur (C') : ce roulement se compose de rotations élémentaires de la congruence (C) autour de la droite de contact Δ. Les trois droites Δ, Σ et Σ' étant concourantes et situées dans un même plan, on peut décomposer la rotation élémentaire autour de Δ en deux autres rotations, l'une $d\sigma$ autour de Σ, l'autre $d\sigma'$ autour de Σ', telles que,

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{\sin s'}{\sin s} = \text{constante}.$$

Or la rotation $d\sigma$ peut être considérée comme un roulement élémentaire du cylindre (Σ) sur le plan P et la rotation $d\sigma'$ comme un roulement élémentaire du plan P sur le cylindre (Σ'), et comme ces deux roulements doivent rester proportionnels, on voit que le cylindre mobile roule sans glissement sur le cylindre fixe, de telle manière qu'une certaine hélice h tracée sur (Σ) vienne rouler sur une certaine hélice h' tracée sur (Σ'). Pour déterminer ces hélices, on remarque que leur développement sur le plan P est une même droite L qui est tangente aux deux hélices ; soient v et v' les angles compris entre la droite L et les génératrices Σ et Σ' : au bout d'un temps infiniment court les génératrices de contact du plan P avec les cylindres sont deux nouvelles droites Σ_1 et Σ'_1, respectivement parallèles à Σ et Σ' et se coupant en un point F_1 situé sur la droite L ; on a donc dans le triangle OFF_1 : $\frac{\overline{OF}}{\overline{OF_1}} = \frac{\sin v}{\sin v'}$, de plus la distance des parallèles Σ et Σ_1 est $rd\sigma$ et la distance des parallèles Σ' et Σ'_1 est de même $r'd\sigma'$, or ces distances sont proportionnelles à $\overline{OF}$ et $\overline{OF_1}$, on a donc finalement :

$$\frac{\sin v}{\sin v'} = \frac{rd\sigma}{r'd\sigma'} = \frac{r \sin s'}{r' \sin s}.$$

Cette relation détermine la droite L et par suite les hélices h et h'. On peut remarquer que ces hélices roulent l'une sur l'autre de telle manière que leurs plans osculateurs coïncident constamment au point de contact F ; ce plan osculateur commun est le plan mené par L normalement au plan P. L'angle compris entre les droites Δ et L est constant, car cet angle est égal à $v' + s'$; la droite L restant tangente aux hélices h et h', le lieu de la droite Δ est un hélicoïde

réglé soit dans la congruence mobile soit dans la congruence fixe; ainsi lorsque (C) roule sur (C') sans glisser, les surfaces qui subissent le roulement sont des hélicoïdes réglés dont les lignes de striction sont des hélices tracées sur (Σ) et (Σ').

Donc étant données deux congruences circulaires quelconques, on voit que chacune contiendra un système d'hélicoïdes, tel que tout hélicoïde appartenant au système de la première congruence est applicable sur l'hélicoïde correspondant dans la seconde congruence.

On obtiendra maintenant tous les déplacements qui font partie de la viration de (C) sur (C') en combinant de toutes les manières possibles les deux déplacements particuliers de translation et de roulement que l'on vient d'étudier: le cylindre (Σ) roulera alors sur le cylindre (Σ') tout en glissant à chaque instant dans la direction de la droite de contact Δ; le lieu des points de contact des deux cylindres sera alors une courbe quelconque variant avec la loi qui fait dépendre le glissement du roulement. On voit encore ici que la position finale de (C) ne dépend que du roulement total et du glissement total, c'est-à-dire du point de contact final des deux cylindres et non pas de chemin suivi pour y arriver.

Les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas où (C) et (C') sont des congruences analytiques quelconques; il suffit pour cela de remplacer les cylindres par les surfaces focales (Σ) et (Σ') des deux congruences et les hélices h et h' par des lignes tracées sur ces surfaces focales. La viration de deux congruences analytiques comprend donc deux déplacements particuliers, l'un est un simple glissement, l'autre un roulement sans glissement; par suite les deux congruences doivent toujours contenir deux systèmes de surfaces réglées applicables deux à deux l'une sur l'autre.

Revenons au mouvement le plus général d'un corps solide qui possède un seul degré de liberté: ce mouvement peut-être produit par la viration d'une certaine surface réglée S sur une autre surface réglée S'; soient (Σ) et (Σ') les surfaces développables enveloppes des plans centraux de S et de S'; pendant le mouvement du corps solide ces développables roulent en glissant l'une sur l'autre comme il a été dit. On pourra donc substituer au mouvement des surfaces S celui des surfaces (Σ), toutes les fois qu'il y aura avantage à le faire; mais l'utilité des surfaces développables (Σ) consiste surtout en ce que ces surfaces permettent de déterminer tout ce qui est relatif à la courbure des trajectoires décrites par les différentes droites de l'espace pendant le mouvement du corps

solide. Toutefois avant de déterminer ces éléments de courbure, il est nécessaire de considérer les congruences analytiques dans leurs rapports avec la théorie des surfaces réglées.

III°.—*Applications à la théorie des surfaces réglées.*

Etant donnée une surface réglée quelconque, on sait qu'il existe toujours une congruence analytique et une seule qui contienne cette surface réglée; on dira donc que deux surfaces réglées sont de la même *famille* lorsqu'elles appartiennent à une même congruence analytique ou à des congruences identiques.

Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit qu'on puisse engendrer les deux congruences en faisant rouler le même plan réglé P sur deux surfaces développables identiques. Cependant deux congruences analytiques peuvent avoir la même surface focale (Σ) et différer par la direction des réglures du plan P; dans ce cas on dira que les surfaces réglées données sont de la même *classe.*

En d'autres mots toute surface développable (Σ) détermine une classe de surfaces réglées, qui peuvent toutes être engendrées par une droite d'un plan qui roule en glissant parallèlement sur (Σ); cette classe contient une infinité de familles qui diffèrent seulement par la direction de la droite génératrice dans le plan mobile. D'après ce qu'on a vu précédemment, les lignes de striction de toutes les surfaces réglées appartenant à une même classe sont portées par la surface (Σ) qui caractérise la classe. Lorsque cette ligne de striction est une ligne géodésique de la surface (Σ), la surface réglée correspondante prendra le nom de *géodésicoïde;* on peut aussi dire qu'un géodésicoïde est une surface réglée dont les génératrices touchent une surface développable (Σ) aux différents points d'une ligne géodésique et font un angle constant avec cette géodésique.* Lorsque cet angle constant est nul, le géodésicoïde est développable, du reste toute surface développable est un géodésicoïde, car toute courbe gauche est une ligne géodésique de sa surface rectifiante.

Toutes les surfaces réglées qui appartiennent à une même famille ont même cône directeur, puisque toute congruence analytique admet un cône directeur.

Toutes les surfaces réglées qui appartiennent à une même classe admettent

---

* Lorsque la ligne de striction d'une surface réglée a son plan osculateur constamment normal au plan central correspondant, cette surface est un géodésicoïde. Enfin on peut encore engendrer tout géodésicoïde en menant, par les différents points d'une courbe gauche des droites situées dans le plan rectifiant et faisant un angle constant avec la tangente.

pour cône directeur un cône engendré par une droite D d'un plan qui roule sur le cône directeur de la développable (Σ), caractéristique de la classe considérée ; la droite D passe bien entendu par le sommet du cône directeur de (Σ).

Prenons comme exemple de classes de surfaces réglées, la classe dont la surface (Σ) est un cylindre d'ailleurs quelconque. Comme le cône directeur d'un cylindre se réduit à une droite, le cône directeur de toute surface réglée comprise dans cette classe sera de révolution ; réciproquement, *si le cône directeur d'une surface réglée est de révolution*, le cône directeur de la surface (Σ) correspondante doit se réduire à une droite, dès lors *l'enveloppe des plans centraux de la surface réglée est un cylindre* (parallèle à l'axe du cône de révolution). La classe dont la surface (Σ) est un cylindre contient donc une infinité de familles admettant chacune un cône directeur de révolution ; parmi tous ces cônes il y en aura un qui se réduit à un plan (perpendiculaire au cylindre), c'est-à-dire que la classe considérée contient toujours une famille de surfaces réglées à plan directeur ; réciproquement toutes les surfaces à plan directeur font partie d'une classe caractérisée par un cylindre : pour le paraboloïde ce cylindre est du second degré, pour le conoïde droit il se réduit à une droite.

On peut prendre comme type de classe de surfaces réglées celle dont la surface (Σ) est un cylindre de révolution, car toute famille de cette classe forme une congruence circulaire ; or une telle congruence est le type des congruences analytiques de même que le cercle est celui des courbes planes ou sphériques. Les géodésicoïdes de cette classe sont des hélicoïdes réglés.

De même que pour compléter la théorie des mouvements à un degré de liberté, nous avons remplacé ceux-ci par des mouvements analytiques, de même nous compléterons la théorie des surfaces réglées en remplaçant celles-ci par les congruences analytiques dont elles font partie. Cette manière de voir est d'ailleurs justifiée si l'on remarque qu'une surface réglée peut être considérée non-seulement comme la trajectoire d'une droite, mais aussi comme l'enveloppe d'une congruence mobile ; il en résulte que les éléments naturels de contact, de courbure, etc. d'une surface réglée sont des congruences et non pas des surfaces. Ainsi la *tangente* à une surface réglée le long d'une de ses génératrices sera la recticongruence déterminée par cette génératrice et par celle qui lui est infiniment voisine ; la *normale* sera la recticongruence perpendiculaire à la tangente ; enfin le *rayon* et l'*axe de courbure* de la surface seront respectivement le rayon et le pôle de la congruence circulaire passant par trois génératrices consécutives de

cette surface. Lorsque ce rayon de courbure est égal à $\frac{\pi}{2} I$, la congruence circulaire osculatrice se confond avec la tangente, c'est-à-dire que la surface réglée présente une inflexion, etc. On voit que l'enveloppe des normales à une surface réglée, n'est pas autre chose que le lieu de ses axes de courbure; ce lieu se nommera la *developpée* de la surface donnée. Réciproquement toute surface réglée a une double infinité de développantes, toutes parallèles entre elles, car elles interceptent partout le même distangle sur leur normale commune. On peut toujours engendrer une surface réglée en faisant virer sa normale sur sa développée, et comme toute surface faisant partie de la normale ne peut être qu'un conoïde droit, on peut considérer toute surface réglée comme engendrée par la viration d'un conoïde droit sur sa développée; ce conoïde et cette développée sont alors, dans l'espace mobile et dans l'espace fixe, le lieu des axes instantanés de torsion d'un trièdre trirectangle qui se déplacerait de telle façon qu'une de ses arêtes décrive la surface donnée et qu'une autre arête reste normale à la surface au point central.

Si l'on voulait déterminer les éléments d'une surface réglée en considérant non pas des congruences mais des surfaces, le conoïde dont on vient de parler jouerait le rôle de la normale, la tangente serait l'hélicoïde à plan directeur passant par deux génératrices, consécutives de la surface, enfin la courbure serait évaluée au moyen de l'hélicoïde dont l'axe coïnciderait avec l'axe de courbure et dont l'hélice de striction serait tangente à la ligne de striction de la surface.

La considération de l'hélicoïde de courbure permet d'étendre à une surface réglée quelconque, certaines formules relatives à l'hélicoïde réglé. Ainsi on sait que le paramètre de distribution des plans tangents à l'hélicoïde est donné par la formule:

$$k = r(\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha),$$

r étant le rayon du cylindre qui porte l'hélice de striction de l'hélicoïde; β l'angle compris entre la génératrice de l'hélicoïde et celle du cylindre et α l'angle compris entre la génératrice du cylindre et la tangente à l'hélice de striction; on en conclut que le paramètre de distribution d'une surface réglée quelconque sera donné par le même formule, dans laquelle r sera le rayon de courbure principal de l'enveloppe des plans centraux, β l'angle compris entre la génératrice de la surface et la caractéristique du plan central, et α l'angle compris entre cette caractéristique et la ligne de striction.

Il faut bien distinguer entre les hélicoïdes de raccordement de la surface réglée (M) et son hélicoïde de courbure; ce dernier est unique, tandis que toute droite faisant partie de la recticongruence normale $(M\Delta)$ peut être prise comme axe d'un hélicoïde de raccordement: en effet soit A une droite rencontrant à angle droit la perpendiculaire commune à M et Δ et faisant avec M un distangle donné $p + qI$; tous les hélicoïdes que la droite M peut décrire autour de A ont même point et plan central que la surface (M), donc parmi ces hélicoïdes, celui qui a le même paramètre de distribution que la surface (M) sera de raccordement.

L'angle ϕ que doit faire l'hélice de striction de cet hélicoïde avec l'axe A du cylindre qui la porte, sera déterminé par la relation:

$$r(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) = p(\operatorname{cotg} q - \operatorname{cotg}\phi),$$

où r, β et α ont la même signification que précédemment. La ligne de striction de l'hélicoïde de raccordement n'est tangente à celle de la surface (M), que si l'on a $q + \phi = \beta + \alpha$, c'est-à-dire s'il y a une certaine relation entre p et q (on obtiendra cette relation en éliminant ϕ entre les deux dernières équations). Enfin lorsque l'hélicoïde est de courbure, son axe satisfait aux équations précédentes et est de plus parallèle à la caractéristique du plan central de la surface réglée, c'est-à-dire que $\phi = \alpha$; mais alors $q = \beta$ et $r = p$, il n'y a donc bien qu'un seul hélicoïde de courbure. Si la surface réglée est un géodésicoïde, sa ligne de striction sera en outre osculatrice à l'hélice de striction de l'hélicoïde de courbure et dans ce cas l'hélicoïde de courbure devient hélicoïde osculateur, mais dans le cas général cet hélicoïde est simplement celui qui se rapproche le plus de la surface, sans pour cela être osculateur. Si l'on voulait étudier une surface réglée au moyen d'une autre surface osculatrice plus simple, il faudrait choisir parmi les surfaces qui font partie de la congruence circulaire osculatrice, celle qui passe par trois génératrices consécutives de la surface donnée: la ligne de striction de cette surface doit donc être située sur le cylindre focal de la congruence circulaire et avoir trois points communs avec la ligne de striction de la surface donnée; on choisira donc comme surface osculatrice, celle dont la ligne de striction est l'intersection du cylindre focal avec le plan osculateur de la ligne de striction de la surface primitive; cette intersection est une ellipse et comme la surface osculatrice est portée par une congruence circulaire, on peut faire décrire cette surface à une droite au moyen d'une seule torsion autour du pôle de la

congruence. Il est facile de voir que pendant cette torsion, tous les points de la droite décrivent des plans et que par suite la surface osculatrice en question est la surface du quatrième degré définie par une droite dont quatre points décrivent des plans fixes, surface qui a été étudiée par M. Mannheim. Le cône directeur de cette surface est de révolution et son axe est l'axe de courbure de la surface donnée.

L'étude des courbes gauches peut être faite sous le même point de vue en prenant l'hélice comme courbe gauche type, c'est-à-dire que pour déterminer les éléments de courbure d'une courbe gauche X en un de ses points, on remplacera la courbe par une hélice dans le voisinage du point. Cette hélice est évidemment l'hélice osculatrice de la courbe gauche. Pour la déterminer, appelons (Σ) la surface rectifiante de la courbe X et K l'axe du cylindre osculateur à (Σ) en un point quelconque m pris sur cette courbe; l'hélice tangente en m à la courbe X et tracée sur ce cylindre osculateur sera l'hélice osculatrice cherchée, car X étant une ligne géodésique de (Σ) son plan osculateur en m est normal à (Σ) donc aussi au cylindre. Or la droite K est parallèle à la génératrice Σ de la surface (Σ), c'est-à-dire que l'axe de l'hélice osculatrice est parallèle à la droite rectifiante de la courbe gauche.

La considération de l'hélice osculatrice permet d'étendre à une courbe gauche quelconque certaines formules relatives à l'hélice; ainsi par exemple on sait que le rayon de courbure ρ et le rayon de torsion τ d'une hélice sont donnés par les formules :

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 v}, \qquad \tau = \frac{r}{\sin v \cos v},$$

r étant le rayon du cylindre qui porte l'hélice et v l'angle que fait la tangente à l'hélice avec les génératrices du cylindre; on en conclut que les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche quelconque sont donnés par les mêmes formules, seulement r désignera le rayon de courbure principal de la surface rectifiante de la courbe gauche et v l'angle que fait la droite rectifiante avec la tangente à la courbe. En divisant les formules précédentes on obtient la formule connue :

$$\operatorname{tang} v = \frac{\tau}{\rho}$$

et en éliminant v :

$$r = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2}.$$

Cette valeur de r exprime la distance de l'axe de l'hélice osculatrice au plan rectifiant de la courbe gauche.

Les deux hélices h et h' de la Fig. (3) offrent un autre exemple de ce genre de généralisation; le plan P tangent aux deux cylindres est le plan rectifiant des deux hélices et les génératrices de contact Σ et Σ' sont les droites rectifiantes des hélices; ces hélices ont même plan osculateurs et lorsqu'elles roulent l'une sur l'autre l'axe instantané de rotation est une droite Δ, située dans le plan P, dont la direction est déterminée par la relation trouvée plus haut:

$$\frac{\sin s}{\sin s'} = \frac{r \sin v'}{r' \sin v},$$

formule que l'on peut aussi écrire en vertu des relations précédentes:

$$\frac{\sin s}{\sin s'} = \frac{\rho \sin v}{\rho' \sin v'} = \frac{\tau \cos v}{\tau' \cos v'}.$$

On en conclut que les mêmes formules permettent de déterminer à chaque instant l'axe instantané de rotation de deux courbes gauches quelconques qui roulent l'une sur l'autre avec coïncidence des plans osculateurs; cet axe de rotation est situé dans le plan rectifiant commun aux deux courbes et doit faire avec les droites rectifiantes de ces courbes des angles s et s', dont la dernière équation détermine le rapport.

Conclusion: Revenons au mouvement le plus général d'un corps solide soumis à cinq conditions; nous avons dit que tout problème concernant le déplacement des droites de l'espace peut être ramené à un problème analogue concernant le déplacement des points d'une figure sphérique, en considérant le mouvement du corps solide comme faisant partie d'un mouvement analytique à deux degrés de liberté. Ces problèmes peuvent être de trois sortes, suivant que l'on considère le déplacement d'une seule droite, d'une série de droites (surface réglée) ou d'une congruence de droites. Le mouvement du solide est défini au moyen des deux surfaces réglées S et S' qui virent l'une sur l'autre, en se raccordant constamment suivant une génératrice commune Δ.

1°. Déplacement d'une droite: Soit A une droite du corps solide; si A' (Fig. 1) est la position infiniment voisine de cette droite, le plan déterminé par la droite A et la perpendiculaire commune K est le plan central de la surface réglée décrite par A et par suite la droite R est la normale à cette surface réglée au point central. Ainsi: la normale à la surface trajectoire de A en son point

central est la perpendiculaire commune à A et à la droite de contact Δ des surfaces S et S'. Pour avoir les normales aux différents points de la droite A, on déterminera le paramètre de distribution des plans tangents en remarquant que la droite A décrit pendant un temps très-court un élément d'hélicoïde autour de la droite Δ; si donc $p + qI$ désigne le distangle formé par les droites A et Δ, on aura pour valeur du paramètre

$$K = p(\operatorname{cotg} q - \operatorname{cotg} \phi),$$

ϕ étant l'angle que fait Δ avec la ligne de striction de l'hélicoïde de raccordement. Mais la direction de cette ligne de striction ne coïncide pas en général avec celle de la ligne de striction de la surface (A), pas plus que la caractérisque du plan central de l'hélicoïde ne coïncide avec celle du plan central de la surface (A); la détermination de ces éléments ainsi que de tout ce qui a rapport à la courbure de la surface (A) nécessite la détermination de l'axe de courbure de (A). Pour construire cet axe, il suffit de considérer les congruences analytiques qui contiennent les surfaces S et S' et de les faire virer l'une sur l'autre; la droite A décrit alors une congruence contenant la surface réglée (A), et dont l'axe de courbure est précisément l'axe cherché. Or, on a vu que cet axe de courbure peut être construit par une méthode identique à celle qui donne le centre de courbure de la trajectoire d'un point sur la sphère (ou sur le plan) et cette construction ne dépend que des droites A, Δ et des axes de courbure des surfaces S et S' relatifs à la droite Δ (car ces axes sont les axes de courbure des congruences qui contiennent S et S'). La construction dite de Savary se trouve ainsi étendue au cas du mouvement le plus général dans l'espace. Si H désigne l'axe de courbure de la trajectoire de A, on obtiendra la caractéristique du plan central de (A) en projetant la droite H sur ce plan central, c'est-à-dire sur le plan mené par A parallèlement à Δ. Enfin, si l'on pose distangle $(AH) = r + \alpha I$, l'angle β que fait la ligne de striction de la surface (A) avec la caractéristique du plan central sera donné par la formule:

$$K = r(\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta)$$

puisqu'on connaît déjà le paramètre K. Il est facile d'ailleurs de construire cette formule géométriquement.

2°. Déplacement d'une surface réglée : Soit B une surface réglée reliée invariablement au corps solide ; la trajectoire de cette surface réglée est une congruence

(B), puisque chaque génératrice b de B décrit une surface réglée. On peut se proposer de déterminer les différents éléments de la congruence (B) relatifs à la génératrice b : pour cela on déterminera d'abord le paraboloïde des normales de la surface B le long de b et le paraboloïde des normales de la surface trajectoire de b ; ces deux paraboloïdes se coupent suivant deux droites qui rencontrent b à angle droit et qui sont les directrices de la congruence linéaire normale à la congruence (B), puisque ces droites sont normales communes à deux surfaces réglées appartenant à la congruence.

3°. Déplacement d'une congruence : Soit C une congruence invariablement reliée au corps solide ; pendant le mouvement de celui-ci, la congruence C enveloppe une surface réglée E qui est le lieu des droites d'intersection de deux positions infiniment voisines de la congruence mobile. Si la congruence C est analytique, on obtient sa caractéristique e en abaissant une recticongruence normale à C et passant par l'axe instantané de torsion Δ. Pour déterminer l'axe de courbure de la surface enveloppe E relatif à la droite e, on supposera de nouveau que le mouvement du solide fait partie d'un mouvement analytique à deux degrés de liberté, obtenu en faisant virer l'une sur l'autre les congruences qui contiennent les surfaces S et S' ; la congruence C enveloppe alors une congruence analytique qui contient la surface réglée E, et dont l'axe de courbure coïncide par conséquent avec l'axe cherché. Dès lors cet axe est aussi l'axe de courbure de la surface décrite, pendant le mouvement à un degré de liberté, par l'axe de courbure de la congruence C relatif à la génératrice e ; on est ainsi ramené à un problème précédent. Si la congruence C se compose de toutes les droites situées dans un même plan, la surface enveloppe E sera évidemment la surface développable enveloppée par ce plan mobile. Les enveloppes des différents plans du corps solide ne sont donc que des cas particuliers des surfaces réglées enveloppées par les congruences qui participent au mouvement.

On voit que l'on peut considérer toute surface réglée soit comme la trajectoire d'une droite mobile soit comme l'enveloppe d'une congruence mobile et plus particulièrement d'une recticongruence mobile. En effet, les droites de l'espace et les recticongruences se correspondent dualistiquement comme les points et les grands cercles sur la sphère, et la surface réglée enveloppe d'une recticongruence mobile est la surface réciproque (ou polaire) de la surface décrite par le pôle de la recticongruence.

APPENDICE.

Composition des mouvements.

Tout déplacement de l'espace étant équivalent à une torsion, le problème de la composition des mouvements revient à celui de la composition des torsions. Mais la loi de la composition des torsions peut être ramenée à son tour à la loi de composition des rotations sur une sphère : il suffit pour cela de remplacer les points de la sphère par les droites de l'espace.

On appelera *vecteur sphérique* tout arc de grand cercle, dont on considère non-seulement la longueur mais aussi le sens et la position sur la sphère.

On appelera *vectangle* tout arc de recticongruence dont on considère non-seulement la grandeur mais aussi le sens et la position dans l'espace. On sait que cet arc est égal au distangle formé par les droites extrémités de l'arc.

Pour représenter complétement un vectangle il suffit donc de représenter les deux droites qui forment ses extrémités. La perpendiculaire commune à ces deux droites est le pôle ou l'axe du vectangle.

Toute rotation de la sphère sur elle-même peut être définie au moyen d'un vecteur sphérique porté par le grand cercle dont le pôle est le centre de rotation; la longueur du vecteur mesure sur ce grand cercle l'angle de la rotation.

Toute torsion de l'espace sur lui-même peut être définie au moyen d'un vectangle* porté par la recticongruence dont le pôle est l'axe de la torsion; le distangle $P + QI$ formé par les droites extrémités du vectangle mesure la valeur de la torsion (la plus courte distance P mesure la translation suivant l'axe du vectangle et l'angle Q la rotation autour de cet axe).

Etant donnés deux vecteurs sphériques sur la même sphère, on peut toujours leur donner pour origine

Etant donnés deux vectangles quelconques on peut toujours leur donner pour origine commune la

*Dans sa "Theory of Screws," R. S. Ball dit à la page 4: "Those acquainted .... will perceive that a twist bears the same relation to a rigid body which a vector does to a point." Il semble qu'il serait plus exact de remplacer "rigid body" par "straight line."

commune le point d'intersection des grands cercles qui les portent, en les faisant glisser sur ces grands cercles.

droite d'intersection des recticongruences qui les portent, en les faisant glisser le long et tourner autour de leurs axes respectifs.

Ainsi l'origine commune de deux vectangles est la perpendiculaire commune aux axes de ces vectangles, et composer deux torsions quelconques en une seule revient à trouver le vectangle résultant de deux vectangles ayant même droite origine.

Or, lorsque deux vecteurs sphériques ont la même origine, on sait que leur vecteur résultant est égal en grandeur, sens et position au double du vecteur dont l'extrémité est le point milieu du premier vecteur composant et dont l'origine est le point milieu d'un vecteur égal et opposé au second vecteur* composant; on peut donc dire immédiatement que:

Le vectangle résultant de deux vectangles qui ont même droite origine est égal en grandeur, sens et position au double du vectangle dont l'extrémité est la droite milieu du premier vectangle composant et dont l'origine est la droite milieu d'un vectangle égal et opposé au second vectangle composant.†

Cette règle permet de composer deux déplacements quelconques car une translation n'est pas autre chose qu'une torsion dont l'angle est nul; un vectangle dont les extrémités sont parallèles représente donc une translation (dans ce cas l'axe devient indéterminé) et de même, un vectangle dont les extrémités se rencontrent représente une rotation.

Proposons-nous maintenant d'établir la loi générale de composition d'un nombre quelconque de torsions. Il est évident que l'on pourrait opérer de proche en proche en combinant les deux premières torsions en une seule, puis celle-ci avec la troisième et ainsi de suite; mais il serait préférable de pouvoir construire la torsion résultante directement au moyen d'une sorte de "polygone des torsions" analogue au polygone des forces. Il suffit pour cela de résoudre le même problème sur la sphère.

---

*Cette règle se déduit directement du théorème de Rodrigues sur la composition de deux rotations autour d'axes concourants, car elle n'en est pas autre chose que le théorème corrélatif. Elle a du reste aussi été énoncée sous cette forme par Sylvester.

†Cette règle a été énoncée par W. Burnside dans le "Messenger of Mathematics" (vol. 19 et vol. 28). Du reste, elle avait déjà été donnée auparavant par T. W. Warren dans le "Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics" (vol. 20), comme corollaire d'un théorème plus général sur la composition d'un nombre quelconque de torsions, mais ainsi que nous le ferons remarquer, le théorème de Warren ne possède pas tout le degré désirable de généralité.

Supposons qu'une sphère subisse successivement une rotation sur elle-même d'un angle α autour d'un point A pris comme pôle, puis une rotation β autour du point B, γ autour de C, δ autour de D, ε autour de E et ζ autour de F; quel sera le pôle et l'angle de la rotation résultante?

La réponse à cette question est basée sur les remarques suivantes: pour que deux polygones sphériques puissent rouler exactement l'un sur l'autre, il faut et il suffit que leurs côtés homologues soient égaux deux à deux; ce roulement consiste en une succession de rotations autour des différents sommets du polygone fixe et l'angle de chacune de ces rotations est égal à la somme algébrique des angles extérieurs correspondants des deux polygones; enfin, si les deux polygones sont fermés, le polygone mobile reviendra à sa position initiale après avoir fait le tour complet du polygone fixe, de sorte que la rotation effectuée autour d'un sommet quelconque est égale et opposée à la résultante de toutes les autres rotations.

Or les pôles A, B, C, ... F forment un polygone ouvert fixe P (Fig. 4) et le polygone Q qui en roulant sur P produira successivement les rotations

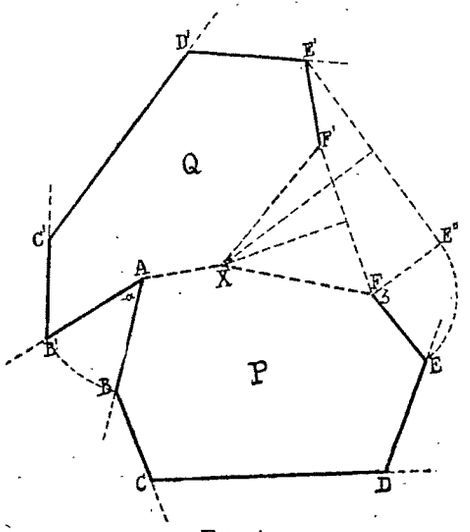


FIG. 4.

α, β, γ, ... ζ, est entièrement déterminé puisque 1° les côtés de Q doivent être respectivement égaux aux côtés homologues de P, 2° la somme algébrique des angles extérieurs homologues de P et de Q doit être égale pour chaque sommet à la rotation correspondante qui est donnée.

On tracera donc le côté AB' égal au côté AB et faisant avec celui-ci l'angle α changé de signe; puis le côté $B'C'$ égal à BC et faisant avec le côté précédent

un angle extérieur égal à β moins l'angle extérieur du polygone P relatif au sommet B, et ainsi de suite; le polygone ouvert $A B' C' D' E' F'$ ainsi obtenu sera tel qu'en roulant sur le polygone P, il produirait le même mouvement que celui qui résulterait des rotations données. Le pôle de la rotation résultante cherchée sera donc un point X qui doit fermer à la fois les deux polygones P et Q de manière à ce que ceux-ci puissent rouler indéfiniment l'un sur l'autre. Pour qu'il en soit ainsi il faut d'abord que $XF = XF'$, donc le point X est sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'; d'autre part si l'on suppose que le polygone Q tourne autour de X jusqu'à ce que F' vienne en F, le point E' viendra en un certain point E'', le point X sera donc aussi sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de $E'E''$; il est par suite entièrement déterminé car le point E'' est tel que $FE'' = F'E' = FE$ et l'angle EFE'' est égal à ζ puisque cet angle est la somme des angles extérieurs de P et de Q relatifs au sommet F. Ayant ainsi déterminé le point X qui ferme les polygones, on joindra XA, XF et XF' et l'angle $F'XF$ représentera la rotation résultante.

Dans ce qui précède, on suppose que les rotations ont lieu autour de points fixes sur la sphère; si au contraire les centres de rotation $A, B, C, \ldots . F$ étaient liés à la sphère mobile, ce serait le polygone P qui roulerait sur le polygone Q; aussi on devra prendre toutes les rotations α, β, γ, etc. avec des signes contraires. Ce changement de signe altérera complètement les angles et la position du polygone Q; le point E'' sera aussi changé car ce n'est plus le point F' qui doit venir en F mais le point F qui vient en F'. À part cela toutes les constructions restent les mêmes.

Enfin, si une partie des centres de rotation étaient fixes et l'autre partie mobile, on combinerait les deux constructions précédentes et l'on pourra toujours compléter les polygones P et Q qui permettent de trouver la rotation résultante X.*

Dans le cas où le nombre des rotations se réduit à deux, les polygones P et Q deviennent des triangles et l'on retrouve le théorème de Rodrigues.

Pour obtenir la torsion résultante d'un nombre quelconque de torsions, il ne

---

* Au lieu de considérer les polygones P et Q, on aurait pu considérer leurs polygones polaires P' et Q'; les rotations seraient alors représentées par des vecteurs sphériques; les angles homologues de P' et Q' seraient égaux et la somme algébrique des côtés homologues serait égale au vecteur sphérique correspondant; enfin, tandis que P et Q roulent l'un sur l'autre sans glisser, P' et Q' glisseraient l'un sur l'autre sans rouler.

reste plus qu'à remplacer les points de la sphère par des droites de l'espace: si A, B, C, ... F désignent les axes des torsions composantes, ces axes formeront une figure P dont les côtés seront formés des distangles AB, BC, ... EF et dont les angles seront formés des codistangles déterminés par les perpendiculaires communes aux droites A et B, B et C, ... E et F. On en déduira une seconde figure Q dont chaque distangle sera égal, au distangle homologue de P et dont chaque codistangle extérieur sera égal à la torsion correspondante moins le codistangle extérieur homologue de la figure P; la figure Q ainsi obtenue est le *polygone des torsions* et la droite X qui ferme ce polygone sera l'axe de la torsion résultante, car la figure Q construite comme il vient d'être dit, pourra virer exactement sur la figure P de telle sorte qu'elle revienne à sa position initiale après avoir effectué le tour complet de P.

Si les axes A, B, C, ... F des torsions composantes ne sont pas fixes dans l'espace, mais sont entraînés avec le corps solide qui subit les torsions, on déterminera la figure Q de la même manière en ayant soin de changer le signe de toutes les torsions; dans ce cas ce sera la figure P qui virera sur la figure fixe Q.*

Considérons maintenant le problème de la décomposition des torsions: Supposons que la sphère fondamentale subisse une rotation donnée autour d'un certain point X pris comme pôle; on peut toujours décomposer cette rotation en trois autres devant avoir lieu successivement autour de trois pôles A, B, C, donnés arbitrairement sur la sphère. En effet, les quatre points A, B, C, X, forment un quadrilatère fixe P et le quadrilatère Q qui doit rouler exactement sur P est entièrement déterminé, puisqu'on en connaît les quatre côtés et un angle (celui qui correspond au sommet X); la figure Q étant ainsi construite, on en déduit immédiatement la valeur des trois rotations composantes A, B, C. Enfin, en remplaçant les points de la sphère par les droites de l'espace, la même construction permet de *décomposer une torsion donnée en trois autres dont les axes soient trois droites données arbitrairement dans l'espace.*

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des déplacements finis. Lorsque les déplacements sont infiniment petits, les vectangles qui les représentent sont eux-

* On voit maintenant que le *gauche rectangular rigid polygon* considéré par Warren dans l'article cité plus haut, n'est qu'un cas particulier du polygone des torsions: cet auteur ne considère en effet que le cas où les deux figures P et Q sont égales dans toutes leurs parties, alors qu'il suffisait que leurs distangles (et non leurs codistangles) fussent égaux deux à deux. C'est parce qu'il contient une condition qui n'est pas nécessaire que le théorème de Warren ne s'applique qu'au cas où les torsions données sont précisément égales au double des codistangles de la figure P.

mêmes infiniment petits, mais la règle de composition reste la même puisque cette règle est indépendante de la valeur des vectangles composants. Toutefois comme on ne peut pas effectuer de constructions sur des grandeurs géométriques infiniment petites et qu'on ne peut pas non plus remplacer ces grandeurs par des grandeurs finies proportionnelles (excepté dans le cas où les déplacements se réduisent à des translations), il est nécessaire d'établir une méthode pour déterminer la plus courte distance et l'angle des droites milieux C_1 et C_3 dans le cas où les vectangles AB_1 et AB_2 sont infiniment petits.

Dans ce but, prenons comme plan horizontal de projection un plan passant par l'axe O_2 du vectangle AB_2 et parallèle à l'axe O_1 du vectangle AB_1. La droite A origine commune des deux vectangles, se projettera au point A (Fig. 5);

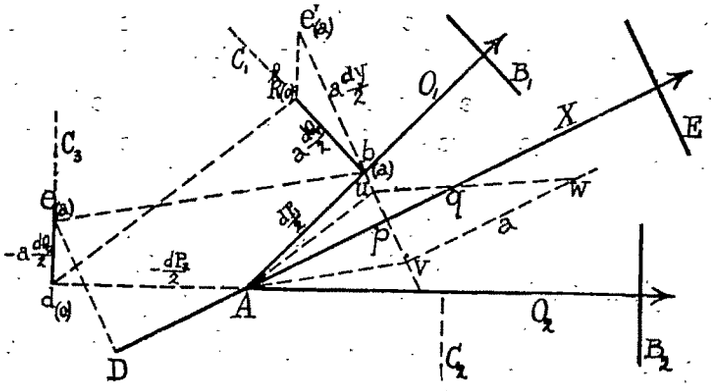


FIG. 5.

les extrémités B_1 et B_2 se projetteront suivant des droites respectivement perpendiculaires aux axes horizontaux O_1 et O_2.

Les deux vectangles composants sont infiniment petits; posons donc: vectangle $AB_1 = dP_1 + IdQ_1$, vectangle $AB_2 = dP_2 + IdQ_2$ et soit : $DE = dx + Idy$ le vectangle résultant qu'il s'agit de déterminer.

La droite milieu C_1 du vectangle AB_1 se projette suivant une droite perpendiculaire à l'axe O_1 et passant par le point milieu b de cet axe; la droite milieu C_3 d'un vectangle égal et opposé au vectangle AB_2 se projette suivant une perpendiculaire à O_2 passant par le point d situé à une distance de A égale à $\left(-\frac{dP_2}{2}\right)$. D'après la règle, l'axe du vectangle résultant est la perpendiculaire commune aux droites C_1 et C_3; or ces droites étant infiniment voisines de la

droite A, leur perpendiculaire commune rencontrera aussi A à angle droit, donc :

1°. *Lorsque les deux vectangles composants sont infiniment petits, la droite origine du vectangle résultant coïncide avec la droite origine des vectangles composants.*

La perpendiculaire commune aux droites C_1 et C_3 est donc une droite horizontale X dont la projection passe par le point A, et pour la déterminer complètement, il suffit de déterminer sa direction et sa cote au dessus du plan horizontal. Dans ce but on définira les droites C_1 et C_3 au moyen de leurs traces sur les plans horizontaux passant respectivement par les axes O_1 et O_3. Soit a la plus courte distance de ces axes ; la cote du point b sera égale à a* et la trace k de la droite C_1 sera à une distance de b égale à $\left(a\frac{dQ_1}{2}\right)$, puisque la droite C_1 fait avec la verticale A l'angle infiniment petit $\frac{dQ_1}{2}$. De même pour la droite C_3, le point d aura une cote nulle et le point e de cote a sera tel que $\overline{de} = -a\frac{dQ_3}{2}$. La direction de la plus courte distance de deux droites étant perpendiculaire à un plan parallèle aux deux droites, on mènera par le point k par exemple une droite $\overline{ke'}$ égale et parallèle à $\overline{de}$; le plan bke' sera parallèle aux droites C_1 et C_3 et comme la cote de e' est égale à la cote de b, la droite be' est une horizontale de ce plan, c'est-à-dire que toute droite perpendiculaire au plan bke' se projetera suivant une droite perpendiculaire à be'. On sait du reste que l'axe du vectangle résultant est une droite horizontale qui rencontre A, donc :

2°. *On obtiendra la projection de l'axe résultant X en abaissant du point A une perpendiculaire sur la droite be'* (résultante de deux vecteurs proportionnels à dQ_1 et $-dQ_3$ qu'on peut supposer de grandeur finie).

La translation résultante dx est égale au double de la plus courte distance des droites C_3 et C_1, c'est-à-dire de la distance d'un point quelconque de la droite C_3 au plan bke' ; cette plus courte distance étant horizontale, le plan bke' est vertical (à un infiniment petit près) et le point e ayant même cote que l'horizontale be', la distance cherchée sera égale à la distance du point e à la droite be'. Si donc on mène eD parallèle à be', la longueur Dp sera la moitié de la translation résultante, c'est-à-dire que :

---

* Les cotes sont indiquées dans la Fig. 5 par des indices entre parenthèses.

3°. *Pour obtenir la translation résultante, on construira le polygone edAbke'* (dont les côtés sont des longueurs finies respectivement proportionnelles aux quantités $-a\,dQ_2$, $-dP_2$, dP_1, $a\,dQ_1$ et $-a\,dQ_2$) *et on mesurera la distance du point e à la droite be'* ; *cette distance sera proportionnelle à la translation résultante.*

Si l'on suppose que le point D représente une droite verticale et que l'on mène la droite E perpendiculaire à X à une distance égale au double de Dp, le vectangle DE sera la projection du vectangle résultant cherché.

Quant à la rotation résultante dy, on sait qu'elle est égale au double de l'angle formé par les droites C_1 et C_3, c'est-à-dire de l'angle bke' ; cet angle étant infiniment petit a pour mesure $\frac{be'}{a}$, donc $be' = a\frac{dy}{2}$, ainsi :

4°. *La rotation résultante est la résultante des rotations composantes* (représentées par des vecteurs de grandeur finie proportionnels à dQ_1 et dQ_2).

Il ne reste plus pour achever le problème qu'à déterminer la cote de l'axe résultant X au-dessus du plan horizontal. Considérons le paraboloïde engendré par une droite horizontale qui s'appuie sur les droites C_1 et C_3 ; la perpendiculaire commune à ces droites est une génératrice de ce paraboloïde ; les droites horizontales dk et eb sont aussi deux génératrices de ce paraboloïde et comme en réalité les points d, k, e, b sont infiniment voisins du point A ces génératrices rencontrent la droite A ; on les obtiendra donc en menant par le point A des droites Au et Av respectivement parallèles aux diagonales dk et eb du polygone de grandeur finie considéré précédemment. D'autre part, le plan bke' qui est vertical (à un infiniment petit près) est un plan directeur du paraboloïde, puisqu'il est parallèle aux deux directrices C_1 et C_3, donc le plan vertical dont la trace est be' coupe le paraboloïde suivant une droite dont on connaît déjà les deux points u et v ; la droite uv étant ainsi une génératrice du second système doit rencontrer en p la droite X qui est une génératrice du premier système ; pour trouver la cote du point p, on rabattra la droite uv sur le plan horizontal en uw au moyen de la perpendiculaire vw égale à a. Ainsi :

5°. *La cote de l'axe résultant X au-dessus du plan horizontal est égale au segment $\overline{pq}$* (obtenu comme il a été dit).

Le vectangle résultant DE des deux vectangles infiniment petits $\overline{AB_1}$ et $\overline{AB_2}$ est ainsi complètement déterminé au moyen de constructions effectuées sur des grandeurs finies, ces constructions étant déduites de la loi générale qui régit

la composition des vectangles de grandeur finie. On voit aussi que le vectangle résultant de deux vectangles infiniment petits est indépendant de l'ordre de composition.

Dans certains cas particuliers les constructions se simplifient beaucoup; ainsi par exemple si l'on veut composer deux rotations dQ_1 et dQ_2 dont les axes O_1 et O_2 sont situés à une distance a l'un de l'autre, on posera $dP_1 = 0$ et $dP_2 = 0$,

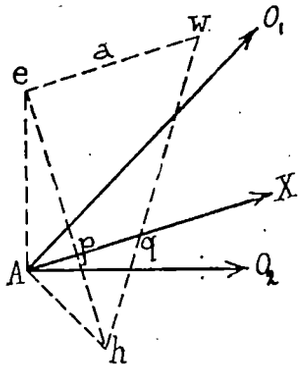


FIG. 6.

c'est-à-dire que les points b et d se confondront avec le point A. On verra sans peine que dans ce cas la construction se réduit à la suivante (Fig. 6).

On élève le segment $\overline{Ae}$ proportionnel à dQ_2 perpendiculairement à O_2 et le segment $\overline{Ah}$ proportionnel à dQ_1 perpendiculairement à O_1; on joint $\overline{eh}$ et l'on construit le segment $\overline{ew} = a$ perpendiculairement à $\overline{eh}$; enfin on joint $\overline{hw}$. L'axe de la torsion résultante sera la droite AX perpendiculaire à $\overline{eh}$ et dont la cote est égale à $\overline{pq}$; la rotation résultante sera proportionnelle au segment $\overline{eh}$ et la translation résultante sera proportionnelle au segment $\overline{pA}$ multiplié par a.

Dans la théorie précédente, la ligne droite est prise comme élément d'espace, non-seulement au point de vue géométrique, mais aussi au point de vue mécanique; cette manière de voir conduit à la conception d'une *cinématique réglée.* La raison d'être de cette branche de la cinématique provient du fait que le déplacement le plus général d'un corps solide est une torsion et l'effort le plus général exercé sur un solide est ce que Plücker appelle un dyname et Ball un torseur (wrench); car l'effort que développe un dyname ou un torseur s'exerce sur une droite de

même qu'une force s'exerce sur un point, puisque le vectangle est à la droite ce que le vecteur est au point.

Une même recticongruence peut porter des torseurs ou des vectangles de pas et d'amplitude quelconques de même qu'une ligne droite peut porter des vecteurs de toute grandeur autrement dit un vectangle est un arc de recticongruence de même qu'un vecteur est un arc de ligne droite; enfin deux torseurs quelconques peuvent toujours être supposés appliqués sur la même droite, parce que les recticongruences qui les portent ont toujours une droite commune.

Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace.

PAR E. GOURSAT.

Un grand nombre de problèmes de la théorie des surfaces se ramènent à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

dont on connaît *a priori* un certain nombre d'intégrales particulières. Si ces intégrales particulières vérifient une relation d'une forme très-simple et très-générale, je démontre, dans la première partie de ce travail, que la suite de Laplace relative à l'équation linéaire se termine dans un sens après un certain nombre de transformations, et le nombre maximum des opérations à effectuer est fourni par la démonstration elle-même.

J'applique ensuite cette proposition générale à un certain nombre d'exemples. La plupart des résultats auxquels on parvient ainsi ne sont pas, il est vrai, essentiellement nouveaux; mais il m'a semblé qu'il y avait quelque intérêt à les déduire tous d'un point de vue commun. J'ai énoncé le théorème fondamental et indiqué rapidement la démonstration dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 27 Janvier 1896 (*Comptes-rendus*, t. CXXII).

I.

[1]. Soit*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{1}$$

une équation linéaire du second ordre, où a, b, c sont des fonctions quelconques des deux variables indépendantes x et y. Nous dirons que n intégrales particulières sont linéairement distinctes s'il n'existe entre ces intégrales aucune relation

* J'emploie les notations de Mr. Darboux dans son ouvrage sur la "Théorie des Surfaces" (tome II, chapitre II et suivants).

linéaire et homogène à coefficients constants, où quelques-uns des coefficients sont différents de zéro. Si n intégrales ne sont pas linéairement distinctes, il y en a parmi elles un certain nombre $n-p$ qui sont linéairement distinctes, et les p intégrales restantes sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des $n-p$ premières.

Si la suite de Laplace relative à l'équation (1) se termine dans un sens, elle admet pour intégrale une expression de la forme

$$z = BY + B_1 Y' + \dots + B_{n-1} Y^{(n-1)}, \tag{2}$$

$B, B_1, \dots B_{n-1}$ étant des fonctions déterminées de x et de y, et Y une fonction arbitraire de y. Remplaçons Y successivement par $(n+1)$ fonctions $Y_1, Y_2, \dots Y_{n+1}$, choisies de telle façon que les intégrales correspondantes $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ soient linéairement distinctes. Entre les $n+1$ équations qui donnent $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$, on peut éliminer $B, B_1, \dots B_{n-1}$, de sorte que ces $n+1$ intégrales particulières vérifient la relation linéaire et homogène

$$\begin{vmatrix} z_1 & Y_1 & Y_1' & \dots & Y_1^{(n-1)} \\ z_2 & Y_2 & Y_2' & \dots & Y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n+1} & Y_{n+1} & Y_{n+1}' & \dots & Y_{n+1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

dont tous les coefficients ne dépendent que de la variable y. Réciproquement,

Théorème A.—Si, entre $n+1$ intégrales linéairement distinctes de l'équation (1), *il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions d'une seule des variables x, y, la suite de Laplace relative à l'équation* (1) *se termine dans un sens après $n-1$ transformations au plus.*

En résolvant la relation qui existe entre $n+1$ intégrales par rapport à l'une de ces intégrales, on peut l'écrire

$$z_{n+1} = \phi_1(y) z_1 + \phi_2(y) z_2 + \dots + \phi_n(y) z_n; \tag{4}$$

on ne diminue pas la généralité en supposant que les n fonctions $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$, $\dots \phi_n(y)$ sont linéairement indépendantes. S'il existait en effet une relation telle que

$$\phi_n(y) = c_1 \phi_1(y) + \dots + c_{n-1} \phi_{n-1}(y) + c_n$$

où $c_1, c_2, \dots c_n$ sont des constantes, l'équation (4) pourrait s'écrire

$$z_{n+1} - c_n z_n = \phi_1(y)(z_1 + c_1 z_n) + \dots + \phi_{n-1}(y)(z_{n-1} + c_{n-1} z_n)$$

et on aurait une relation de même forme entre n intégrales seulement

$$z_1 + c_1 z_n, \ldots z_{n-1} + c_{n-1} z_n, \; z_{n+1} - c_n z_n.$$

[2]. Vérifions d'abord que la loi est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$. Si $n = 1$, la relation (4) s'écrit

$$z_2 = \phi_1(y) z_1;$$

en posant, dans l'équation (1), $z = z_1 u$, la nouvelle équation en u doit admettre les deux intégrales $u_1 = 1$, $u_2 = \phi_1(y)$, ce qui exige que le coefficient de u et le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial y}$ soit nul. Un des invariants est donc nul pour cette équation en u et, par suite, pour l'équation en z.

Si $n = 2$, la relation (4) est de la forme

$$z_3 = \phi_1(y) z_1 + \phi_2(y) z_2;$$

cette relation exprime que z_1, z_2, z_3 sont trois intégrales particulières d'une équation du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial z}{\partial x} + \mu z = 0, \tag{5}$$

où λ et μ sont des fonctions de x et de y, et nous avons à rechercher les conditions pour que les équations (1) et (5) admettent *trois* intégrales communes linéairement distinctes. En différentiant l'équation (5) par rapport à y, on a

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} z = 0;$$

en différentiant de même l'équation (1) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x} z = 0.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$ et en remplaçant ensuite $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ par $-\left(\lambda \frac{\partial z}{\partial x} + \mu z\right)$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ par $-\left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z\right)$, on aboutit à une nouvelle équation

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + ab - c - \frac{\partial a}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\mu - \lambda b + b^2 - \frac{\partial b}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} \\ &\qquad + \left\{\frac{\partial \mu}{\partial y} + a\mu - \lambda c + bc - \frac{\partial c}{\partial x}\right\} z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

qui doit être vérifiée par toute intégrale commune aux équations (1) et (5). Si le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ n'est pas nul, on en déduira, A et B étant des fonctions de x et de y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Az + B\frac{\partial z}{\partial x};$$

cette équation et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les dérivées $\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$ au moyen de z, $\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots \zeta \ldots \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \ldots$ D'autre part, l'équation (5) et celles qu'on en déduit en différentiant par rapport à x donnent toutes les dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ en fonction de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$. Il suit de là que, pour une intégrale commune aux équations (5) et (6), on connaît les valeurs de toutes les dérivées en un point (x_0, y_0) dès qu'on connaît les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en ce point. L'intégrale générale de ce système ne dépend donc que de deux constantes arbitraires, au plus; et, comme les équations sont linéaires, elles ne peuvent admettre plus de deux intégrales linéairement distinctes.

Si le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ est nul, sans que celui de $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit nul, l'équation (6) est de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Az;$$

l'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$z = z' Y,$$

Y désignant une fonction arbitraire de y. Il y aurait donc entre les trois intégrales z_1, z_2, z_3 deux relations distinctes de la forme (4)

$$z_3 = z_1 \psi_1(y), \quad z_2 = z_1 \psi_2(y),$$

et nous retombons sur le cas qui vient d'être examiné.

Il faut donc que l'équation (6) se réduise à une identité, ou que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial y} + ab - c = \frac{\partial a}{\partial x}, \\ &\mu - \lambda b + b^2 = \frac{\partial b}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \mu}{\partial y} + a\mu - \lambda c + bc = \frac{\partial c}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

l'élimination de λ et μ entre ces trois équations conduisa à une équation de condition entre a, b, c. Pour faire cette élimination, considérons l'invariant k relatif à l'équation (1)

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c;$$

on a

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Des équations (7) on tire

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} - \lambda\frac{\partial b}{\partial y} - b\frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2b\frac{\partial b}{\partial y},$$

et, en remplaçant $\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial c}{\partial x}$ par leurs valeurs, il reste, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial \log k}{\partial x} = 2b - \lambda.$$

On a d'ailleurs

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 2\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

$$2k - h = 2\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y} - 2k + h = 0. \tag{8}$$

Or cette relation exprime précisément que l'invariant k_{-1} de l'équation (E_{-1}) obtenue par la transformation

$$z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz$$

est nul. La suite de Laplace se termine donc dans un sens après une seule transformation.

[3]. Passons maintenant au cas général et supposons, pour plus de précision, qu'entre les $(n+1)$ intégrales $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$, il existe une relation et *une seule* de la forme (4). S'il en existait deux, par exemple, on pourrait éliminer

z_{n+1} et on serait conduit à une relation de même forme entre n intégrales seulement $z_1, z_2, \ldots z_n$. Dans ces conditions, les $(n+1)$ intégrales $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ vérifient une même équation linéaire d'ordre n

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} + A_n z = 0, \tag{9}$$

et ne vérifient aucune équation de même forme et d'ordre inférieur.

En différentiant l'équation (1) par rapport à x plusieurs fois de suite, on peut exprimer $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ldots \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}$ en fonction linéaire de $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$. De même, en différentiant l'équation (9) par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial y} z = 0;$$

si on remplace ensuite $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}, \ldots \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ et enfin $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ par leurs valeurs, il reste une équation de la forme

$$C_0 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + C_1 \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + C_{n-1} z + D \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

qui est vérifiée par toute intégrale commune aux équations (1) et (9). Si D n'est pas nul, cette équation (10) et celles qu'on en déduit par des différentiations successives permettront d'exprimer toutes les dérivées partielles de z au moyen de z et de ses dérivées par rapport à la variable x seulement. L'équation (9) et celles qu'on obtient en différentiant par rapport à x donnent d'ailleurs toutes les dérivées par rapport à x en fonction des $n-1$ premières. Il suit de là que, si z est une intégrale commune aux équations (1) et (9), toutes les dérivées partielles de cette fonction en un point (x_0, y_0) sont connues, si on connaît en ce point les valeurs de $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$. L'intégrale générale du système formé par les équations (1) et (9) dépend donc de n constantes arbitraires au plus, et, comme ces équations sont linéaires, elles ne peuvent admettre $n+1$ intégrales linéairement distinctes.

Il faut donc que l'on ait $D = 0$, et alors l'équation (10) doit se réduire à une identité; s'il en était autrement, les intégrales $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ vérifieraient une équation linéaire de même forme que l'équation (9) et d'ordre inférieur à n, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si l'on a à la fois

$$C_0 = C_1 = \ldots . = C_{n-1} = D = 0,$$

les équations (1) et (9) admettent une infinité d'intégrales communes, dépendant d'une fonction arbitraire. Le systême formé par ces deux équations est un *systême en involution* ou un *systême de Darboux*, suivant une expression proposée par Mr. Sophus Lie. Sans faire ici la théorie générale de ces systêmes, nous montrerons directement comment on peut trouver l'intégrale générale des équations (1) et (9). Remarquons pour cela que la relation (10) a été obtenue en combinant linéairement l'équation (1) et ses n premières dérivées par rapport à x, l'équation (9) et sa dérivée par rapport à y. Si la relation (10) est vérifiée identiquement, on a donc une identité de la forme

$$\frac{d^{n-1}\Phi(z)}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}\Phi(z)}{dx^{n-2}} + \ldots . + \alpha_{n-1}\Phi(z) - \frac{dF(z)}{dy} - \beta F(z) = 0, \quad (11)$$

en posant, pour abréger,

$$F(z) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots . + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} + A_n z,$$

$$\Phi(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n, \beta$ désignent des fonctions de x et de y, dont il serait facile d'avoir l'expression. Cette relation (11) est vérifiée quelle que soit la fonction $f(x, y)$ que l'on mette à la place de z. Remplaçons y maintenant z par une intégrale de l'équation (9); elle devient

$$\frac{d^{n-1}\Phi(z)}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}\Phi(z)}{dx^{n-2}} + \ldots . + \alpha_{n-1}\Phi(z) = 0.$$

Pour que l'on ait aussi $\Phi(z) = 0$, on voit qu'il suffit que $\Phi(z)$ et ses $n-2$ premières dérivées par rapport à x soient nulles pour une valeur x_0 de la variable dans le voisinage de laquelle les coefficients $\alpha_1 \ldots . \alpha_n$ sont holomorphes. Ainsi, *pour qu'une intégrale $z = f(x, y)$ de l'équation* (9) *soit aussi une intégrale de l'équation* (1), *il faut et il suffit qu'en remplaçant z par $f(x, y)$ dans le premier membre de l'équation* (1), *le résultat de la substitution soit nul, ainsi que ses $(n-2)$ premières dérivées par rapport à x, pour une valeur particulière x_0 de cette variable.*

L'intégrale générale de l'équation (9) est de la forme

$$z = \phi_0(y) u_0 + \phi_1(y) u_1 + \ldots . + \phi_{n-1}(y) u_{n-1}, \quad (12)$$

$u_0, u_1, \ldots . u_{n-1}$ étant n intégrales particulières et $\phi_0(y), \phi_1(y), \ldots . \phi_{n-1}(y)$ des fonctions arbitraires de y; nous supposerons qu'on a choisi ces intégrales particulières de telle façon que $\phi_0(y), \phi_1(y), \ldots . \phi_{n-1}(y)$ soient précisément les valeurs initiales de $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots . \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$ pour $x = x_0$. Cette intégrale sera alors représentée, dans le voisinage du point x_0, par le développement

$$z = \phi_0(y) + (x - x_0)\phi_1(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\phi_2(y) + \ldots . \\ + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\phi_{n-1}(y) + \ldots . , \quad (13)$$

si on remplace z par ce développement dans le premier membre de l'équation (1), le résultat de la substitution sera identiquement nul, d'après ce qui précède, pourvu qu'en développant ce résultat suivant les puissances de $x - x_0$ les n premiers coefficients soient nuls. En d'autres termes, il suffira que les n fonctions $\phi_0(y), \phi_1(y), \ldots . \phi_{n-1}(y)$ vérifient les conditions qui doivent être vérifiées par les fonctions de y auxquelles se réduisent, pour $x = x_0$, une intégrale z de l'équation (1) et ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots . \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$.

[4]. Avant de poursuivre le raisonnement, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Soit z une intégrale de l'équation (1) qui, pour $x = x_0$, se réduit à une fonction de y, $\phi_0(y)$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots . \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$ se réduisent respectivement à $\phi_1(y), \ldots . \phi_{n-1}(y)$. *On peut exprimer $\phi_0(y)$, $\phi_1(y), \ldots . \phi_{n-1}(y)$, par des formules linéaires et homogènes, au moyen de $p-1$ constantes arbitraires et d'une fonction arbitraire Y de y et de ses $(n-p)$ premières dérivées, sans aucun signe de quadrature.*

Désignons par a_0, b_0, c_0 les fonctions de y auxquelles se réduisent a, b, c, pour $x = x_0$; l'équation (1) nous donne d'abord

$$\phi_1'(y) + a_0\phi_1(y) + b_0\phi_0'(y) + c_0\phi_0(y) = 0,$$

ou, en multipliant par $e^{\int a_0 dy}$,

$$\frac{d}{dy}\left\{\phi_1(y)e^{\int a_0 dy}\right\} + b_0 e^{\int a_0 dy}\phi_0'(y) + c_0 e^{\int a_0 dy}\phi_0(y) = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$b_1 = b_0 e^{\int a_0 dy} \qquad c_1 = c_0 e^{\int a_0 dy},$$

et intégrons par rapport à y; il vient

$$\phi_1(y) e^{\int a_0 dy} + \int b_1 \phi_0'(y)\, dy + \int c_1 \phi_0(y)\, dy = 0,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\phi_1(y) e^{\int a_0 dy} + b_1 \phi_0(y) + \int \left(c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) \phi_0(y)\, dy = 0.$$

Si $c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y} = 0$, il suffira de poser $\phi_0(y) = Y$, et $\phi_1(y)$ s'exprimera aussi linéairement en fonction de Y et d'une constante arbitraire; si $c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y}$ n'est pas nul, on posera

$$\left(c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) \phi_0(y) = Y',$$

et on trouvera pour $\phi_1(y)$ une expression de la forme

$$\phi_1(y) = \alpha Y + \beta Y'.$$

Supposons la loi vraie jusqu'à la dérivée d'ordre p, de telle façon que $\phi_0(y), \ldots \phi_p(y)$ s'expriment au moyen d'une fonction arbitraire de y, et de ses $(p-r)$ premières dérivées, et de r constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots C_r$, par des formules linéaires et homogènes dont les coefficients sont des fonctions déterminées de x et de y. Pour calculer ensuite $\left(\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^{p+1}}\right)_{x_0} = \phi_{p+1}(y)$, on part de la formule

$$\frac{\partial^{p+2} z}{\partial x^{p+1} \partial y} + a \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^{p+1}} + \alpha_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + \ldots + \alpha_p \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_{p+1} z + \beta \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

obtenue en différentiant p fois l'équation (1) par rapport à x. Si on fait dans cette relation $x = x_0$ et qu'on remplace ensuite $\phi_0(y), \ldots \phi_p(y)$ par les expressions déjà obtenues, il vient

$$\phi_{p+1}'(y) + a_0 \phi_{p+1}(y) + l_0 Y + l_1 Y' + \ldots + l_{p-r+1} Y^{p-r+1} + m_1 C_1 + \ldots + m_r C_r,$$

$l_0, l_1, \ldots l_{p-r+1}, m_1, \ldots m_r$ étant des fonctions déterminées de y, Y une fonction arbitraire de y, et $C_1, \ldots C_r$ des constantes arbitraires. Multiplions

encore par $e^{\int a_0 dy}$ et intégrons par parties autant de fois que possible; il vient

$$\frac{d}{dy}\left(e^{\int a_0 dy}\phi_{p+1}(y)\right) = \frac{d}{dy}\Big\{L_0 Y + L_1 Y' + \ldots + L_{p-r} Y^{(p-r)} + M_1 C_1 + \ldots + M_r C_r\Big\} + NY,$$

$L_0, L_1, \ldots L_{p-r}$, $M_1, \ldots M_r$, N étant des fonctions déterminées de y. Si N est nul, on voit que $\phi_{p+1}(y)$ est une fonction linéaire et homogène de $Y, Y', \ldots Y^{(p-r)}$, $C_1, C_2, \ldots C_r$ et d'une nouvelle constante arbitraire C_{r+1}. Si N n'est pas nul, on posera $NY = Y_1'$, Y_1 étant une nouvelle fonction arbitraire, et on voit que $\phi_0(y), \phi_1(y), \ldots \phi_{p+1}(y)$ seront des fonctions linéaires et homogènes de $Y_1, Y_1', \ldots Y^{p-r+1}$, et des r constantes $C_1, C_2, \ldots C_r$. La loi est donc générale.

En remplaçant $\phi_0(y), \phi_1(y), \ldots \phi_{n-1}(y)$ par les expressions précédentes dans la formule (12), on voit donc que l'intégrale générale du système en involution formé par les équations (1) et (9) est donnée par une formule telle que la suivante

$$z = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots + C_{p-1} v_{p-1} + AY + A_1 Y' + \ldots + A_{n-p} Y^{(n-p)},$$

$v_1, v_2, \ldots v_{p-1}$, $A, A_1, \ldots A_{n-p}$ désignant des fonctions déterminées de x et de y, $C_1, C_2, \ldots C_{p-1}$ des constantes arbitraires et Y une fonction arbitraire de y.

La démonstration s'achève d'elle-même. Si on suppose nulles toutes les constantes $C_1, C_2, \ldots C_{p-1}$, on voit que l'équation (1) admet pour intégrale

$$z = AY + A_1 Y' + \ldots + A_{n-p} Y^{(n-p)},$$

où Y est une fonction arbitraire de y, ce qui suffit pour prouver que la suite de Laplace relative à l'équation (1) se termine dans un sens après $n-p$ transformations au plus. Comme le nombre p est au moins égal à un, la proposition est démontrée.

Il est à remarquer que, si la suite de Laplace ne se termine qu'après $n-1$ transformations, le nombre p est forcément égal à un, de sorte que la formule précédente ne renferme aucune constante arbitraire.

[5]. La proposition générale qui précède peut encore se démontrer de proche en proche de la manière suivante. Supposons qu'entre $(n+1)$ intégrales linéairement distinctes $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ de l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

il existe une relation de la forme

$$\phi_1(y)\,z_1 + \phi_2(y)\,z_2 + \ldots\ldots + \phi_{n+1}(y)\,z_{n+1} = 0. \tag{14}$$

Posons $z = z_{n+1}\,u$, u désignant une nouvelle fonction inconnue; l'équation en u, devant admettre la solution $u_{n+1} = 1$, n'a pas de terme constant. Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

cette équation; en posant

$$v = \frac{\partial u}{\partial x},$$

v satisfait à une équation de même forme que l'on obtient en écrivant l'équation en u

$$\frac{\partial v}{\partial y} + a_1 v + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

et éliminant u entre ces deux relations. On est ainsi conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \log b_1}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + a_1 v\right) = 0. \tag{15}$$

D'autre part, la relation (14) nous donne entre les n intégrales $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ de la nouvelle équation linéaire (15) la relation

$$\phi_1(y)\,v_1 + \phi_2(y)\,v_2 + \ldots\ldots + \phi_n(y)\,v_n = 0.$$

La loi étant supposée vraie dans le cas de n intégrales, l'équation (15) admet une intégrale de la forme

$$v = AY + A_1 Y' + \ldots\ldots + A_{n-2} Y^{(n-2)},$$

$A, A_1, \ldots\ldots A_{n-2}$ étant des fonctions déterminées de x et de y, et Y une fonction arbitraire de y. La valeur correspondante de u s'obtiendra par une quadrature

$$u = \int v\,dx - \frac{1}{b_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + a_1 v\right) dy$$

ou

$$u = \int \psi_0\,dx + \psi_1\,dy,$$

ψ_0 et ψ_1 étant des expressions de la forme suivante

$$\psi_0 = AY + A_1 Y' + \ldots\ldots + A_{n-2} Y^{(n-2)},$$
$$\psi_1 = BY + B_1 Y' + \ldots\ldots + B_{n-1} Y^{(n-1)},$$

$B, B_1, \ldots . B_{n-1}$ étant aussi des fonctions déterminées de x et de y. Or on sait que lorsque l'expression $\psi_0 dx + \psi_1 dy$ est une différentielle exacte pour toutes les formes possibles de la fonction Y, on peut toujours, par des opérations purement algébriques, mettre l'intégrale

$$\int \psi_0 dx + \psi_1 dy$$

sous l'une ou l'autre des formes suivantes

$$Y_1 + C_1 Y_1' + \ldots . + C_{n-1} Y_1^{(n-1)},$$
$$C_1 Y_1 + C_2 Y_1' + \ldots . + C_{n-1} Y_1^{(n-2)},$$

Y_1 désignant une nouvelle fonction arbitraire de y.* L'équation en u et, par suite, l'équation en z admettent donc une solution de rang n ou de rang inférieur.

[6]. On arrive encore au même résultat par un autre procédé qui se rapproche davantage de la méthode de Laplace. Calculons d'abord le coefficient D de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans l'équation (10). Quand on calcule les dérivées successives $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ldots \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}$, le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans ces dérivées provient uniquement du terme $b \frac{\partial z}{\partial y}$ de l'équation (1); on a par exemple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -b \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots ,$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(-\frac{\partial b}{\partial x} + b^2\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots .$$

D'une manière générale, si on a trouvé

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^p \partial y} = b_p \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots .$$

en différentiant de nouveau par rapport à x, on trouvera

$$\frac{\partial^{p+2} z}{\partial x^{p+1} \partial y} = \left(\frac{\partial b_p}{\partial x} - b . b_p\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots .$$

On remarquera que chacun de ces coefficients se déduit du précédent par la même loi que les coefficients successifs de $e^{-\int b dx}$ dans les dérivées successives de

* Darboux, tome II, p. 151.

cette fonction par rapport à x. D'ailleurs le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ est précisément égal au coefficient de $e^{-\int b dx}$ dans la dérivée première. On a donc, d'une manière générale,

$$b_p e^{-\int b dx} = \frac{\partial^p \left(e^{-\int b dx}\right)}{\partial x^p}.$$

Si on porte ces valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}$ dans $\frac{dF(z)}{dy}$, le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans le résultat est par conséquent égal à

$$e^{+\int b dx} \left\{ \frac{\partial^n \left(e^{-\int b dx}\right)}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} \left(e^{-\int b dx}\right)}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_n e^{-\int b dx} \right\};$$

pour que le coefficient D soit nul dans l'équation (10), comme cela doit être, nous voyons que *la fonction* $e^{-\int b dx}$ *doit être une intégrale particulière de l'équation* (9).

Cela posé, imaginons qu'on fasse la transformation

$$z = u e^{-\int b dx};$$

l'équation (1) se change en une équation de même forme ne renfermant pas de terme en $\frac{\partial u}{\partial y}$, et l'équation (9) en une équation ne renfermant pas de terme en u. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a commencé par ramener l'équation (1) à cette forme. Posons alors, en supposant que c n'est pas nul,

$$\Phi_1(z) = \frac{s + ap}{c} + z,$$

$$F(z) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x};$$

la relation (11) prend la forme

$$\frac{d^{n-1}\Phi_1(z)}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}\Phi_1(z)}{dx^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-1}\Phi_1(z) + \beta_1 \frac{dF(z)}{dy} + \beta_2 F(z) = 0, \quad (16)$$

et cette équation est, par hypothèse, vérifiée identiquement, quelle que soit la fonction z. Or $F(z)$ et $\frac{dF(z)}{dy}$ ne renferment pas de terme en z; $\frac{d\Phi_1(z)}{dx}$,

$\frac{d^3\Phi_1(z)}{dx^3}, \ldots.$ ne contiennent pas non plus de terme en z. On doit donc avoir $\alpha_{n-1}=0$. Si on prend maintenant pour inconnue nouvelle

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_1,$$

et qu'on pose

$$F_1(z_1)=\frac{\partial^{n-1}z_1}{\partial x^{n-1}}+A_1\frac{\partial^{n-2}z_1}{\partial x^{n-2}}+\ldots.+A_{n-1}z_1,$$

$$\Psi(z_1)=\frac{d\Phi_1(z)}{dx}=\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial x}z_1}{c}-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{c^2}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}+az_1\right)+z_1,$$

la relation (16) devient

$$\frac{d^{n-2}\Psi(z_1)}{dx^{n-2}}+\alpha_1\frac{d^{n-3}\Psi(z_1)}{dx^{n-3}}+\ldots.+\alpha_{n-2}\Psi(z_1)+\beta_1\frac{dF_1(z_1)}{dy}+\beta_2F_1(z_1)=0, \quad (17)$$

ce qui montre que l'équation du second ordre

$$\Psi(z_1)=0, \quad (18)$$

et l'équation linéaire d'ordre $n-1$

$$F_1(z_1)=0$$

forment un systême en involution. Or l'ensemble des deux transformations par lesquelles on passe de l'équation (1) à l'équation (18) est précisément une des transformations de Laplace. Par conséquent, *lorsque l'équation du second ordre* (1) *forme un système en involution avec une équation linéaire d'ordre n, une transformation de Laplace la ramène à une équation qui forme un système en involution avec une équation linéaire d'ordre $n-1$.*

Après $n-1$ transformations au plus, on sera donc conduit à une équation du second ordre formant un systême en involution avec une équation linéaire du premier ordre, c'est-à-dire à une équation ayant un invariant nul. On ne pourra être arrêté dans cette suite d'opérations que si on rencontre une équation de la forme

$$s+ap=0;$$

mais le but proposé est alors atteint, puisque l'un des invariants est nul pour cette équation.

Remarque.—Soit $F(z)=0$ une équation linéaire de la forme (9) formant avec l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

un systême en involution. Dans l'identité (11) le coefficient de $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ est $-a-\beta$; on doit donc avoir $\beta = -a$ et l'identité (11) peut s'écrire

$$e^{-\int a dy}\left\{\frac{d^{n-1}.\Phi(z)}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}\Phi(z)\right\} = \frac{d}{dy}\left\{e^{-\int a dy}F(z)\right\},$$

identité que montre que l'équation (1) forme un systême en involution avec toute équation linéaire de la forme

$$e^{-\int a dy}F(z) - X = 0,$$

où X est une fonction arbitraire de x. En reprenant les raisonnements du n° 3, on obtient pour l'intégrale générale de ce systême une expression de la forme (2), augmentée de différents termes où la fonction X figure sous des signes d'intégration.

[7]. La seconde démonstration qui vient d'être donnée conduit à une proposition plus générale. Supposons qu'entre n intégrales linéairement distinctes il existe une relation linéaire de la forme

$$\phi_1(y)z_1 + \phi_2(y)z_2 + \ldots\ldots + \phi_n(y)z_n = e^{-\int b dx}, \tag{19}$$

les coefficients de $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ ne dépendant que de la variable y. Ces n intégrales satisfont à une équation linéaire d'ordre n

$$F(z) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots\ldots + A_{n-1}\frac{\partial z}{\partial x} + A_n = 0$$

qui, d'après l'hypothèse d'où nous partons, est vérifiée aussi par la fonction $e^{-\int b dx}$. En reprenant le raisonnement du n° 3, on démontre comme plus haut que toutes les intégrales communes à l'équation proposée et à l'équation $F(z)=0$ satisfont à une équation de la forme (10)

$$C_0\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + C_1\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots\ldots + C_{n-1}z + D\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

d'après le calcul qui vient d'être fait, le coefficient D est égal à $F\left(e^{-\int b dx}\right)$, c'est-à-dire à zéro. La suite du raisonnement s'achève comme au n° 3 et on peut énoncer

la proposition suivante: *Si l'équation* (1) *admet n intégrales linéairement distinctes liées par une relation de la forme* (11), *la suite de Laplace relative à cette équation se termine dans un sens après* $(n-1)$ *transformations au plus.*

On peut encore établir ce résultat comme il suit. Si l'équation (1) admet n intégrales liées par une relation de la forme (19), en posant

$$z = u\, e^{-\int b dx},$$

la relation (19) devient

$$\phi_1(y)\, u_1 + \phi_2(y)\, u_2 + \ldots + \phi_n(y)\, u_n = 1;$$

si on prend ensuite pour nouvelle inconnue

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z',$$

on aura entre les n intégrales $z'_1, z'_2, \ldots z'_n$ la relation linéaire et homogène

$$\phi_1(y)\, z'_1 + \phi_2(y)\, z'_2 + \ldots + \phi_n(y)\, z'_n = 0.$$

Or la suite des deux transformations précédentes est équivalente à une transformation de Laplace

$$z' = \frac{\partial}{\partial x}\left(z e^{\int b dx}\right) = e^{\int b dx}\left\{\frac{\partial z}{\partial x} + bz\right\}$$

abstraction faite du facteur $e^{\int b dx}$; les n fonctions $z'_1, z'_2, \ldots z'_n$ sont donc des intégrales d'une équation de même forme que l'équation (1) et nous retombons sur le premier cas. La suite de Laplace relative à l'équation en z' se termine après $n-2$ transformations au plus; donc la suite relative à l'équation (1) se termine elle-même après $n-1$ transformations au plus.

[8]. La dernière proposition est encore susceptible de généralisations étendues. Nous définirons d'abord un certain nombre de fonctions $H_1, H_2, \ldots H_i, \ldots$ qui figurent dans la relation qui va être établie. Supposons que l'équation (1) admette une intégrale de la forme

$$z = BY + B_1 Y' + \ldots + B_i Y^{(i)},$$

où Y est une fonction arbitraire de y; il est possible de déterminer *a priori* les coefficients $B_i, B_{i-1}, B_{i-2}, \ldots$ sans connaître le nombre entier i. Si, en effet, on substitue la valeur précédente de z dans la premier membre de l'équation (1),

en égalant à zéro les coefficients de $Y^{(i+1)}$, $Y^{(i)}$, $Y^{(i-1)}$, ..., on trouve les relations

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} + bB_i = 0,$$

$$\frac{\partial B_{i-1}}{\partial x} + bB_{i-1} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial B_i}{\partial x} + b\frac{\partial B_i}{\partial y} + cB_i = 0,$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{\partial B_{i-k-1}}{\partial x} + bB_{i-k-1} + F(B_{i-k}) = 0.$$

Définissons une suite de fonctions H_0, H_1, H_2, ... H_k par la relation de récurrence suivante

$$H_0 = 0,$$

$$H_1 = e^{-\int b dx},$$

$$H_2 e^{\int b dx} + \int F(H_1) e^{\int b dx} dx = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{k+1} e^{\int b dx} + \int F(H_k) e^{\int b dx} dx = 0;$$

cela posé, si entre n intégrales distinctes de l'équation (1) et les k fonctions H_1, H_2, ... H_k il existe une relation linéaire de la forme

$$\phi_1(y) z_1 + \ldots + \phi_n(y) z_n + \psi_1(y) H_1 + \ldots + \psi_k(y) H_k = 0,$$

dont les coefficients ne dépendent que de la variable y, la suite de Laplace relative à cette équation se termine dans un sens après $(n + k - 2)$ transformations au plus. On le démontre de proche en proche en prouvant qu'une relation de la forme précédente se change en une relation de même forme avec une fonction H de moins quand on effectue une transformation de Laplace.

[9]. Lorsque l'équation (1) admet deux suites d'intégrales $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ et $(z'_1, z'_2, \ldots z'_p)$ satisfaisant respectivement à deux relations de la forme

$$\phi_1(y) z_1 + \ldots + \phi_n(y) z_n = 0,$$
$$\psi_1(x) z'_1 + \ldots + \psi_p(x) z'_p = 0,$$

la suite de Laplace relative à l'équation (1) se termine dans les deux sens. Il peut d'ailleurs arriver que les mêmes intégrales verifient deux relations linéaires

et homogènes, les coefficients de ces deux relations ne dépendant respectivement que de la variable x et de la variable y. Prenons par exemple l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{2z}{(x-y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = 2\frac{X-Y}{x-y} - X' - Y',$$

X étant une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y. On obtient la même intégrale en prenant, d'une part $X = Ax^2 + 2Bx + C$, $Y = 0$, d'autre part $X = 0$, $Y = (Ay^2 + 2By + C)$. Si donc on considère les trois intégrales z_1, z_2, z_3 obtenues en prenant respectivement

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1, \quad Y_1 = 0, \\ X_2 &= a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2, \quad Y_2 = 0, \\ X_3 &= a_3 x^2 + 2b_3 x + c_3, \quad Y_3 = 0, \end{aligned}$$

ces trois intégrales vérifient d'une part la relation suivante obtenue en éliminant $\frac{1}{x-y}$

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1 & a_1 x + b_1 \\ z_2 & a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2 & a_2 x + b_2 \\ z_3 & a_3 x^2 + 2b_3 x + c_3 & a_3 x + b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Par raison de symétrie, elles vérifient aussi la relation obtenue en changeant x en y

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_1 y^2 + 2b_1 y + c_1 & a_1 y + b_1 \\ z_2 & a_2 y^2 + 2b_2 y + c_2 & a_2 y + b_2 \\ z_3 & a_3 y^2 + 2b_3 y + c_3 & a_3 y + b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

II.

[10]. Dans ce qui suit, nous désignerons par les lettres ρ, ρ_1 ou α, β les variables indépendantes, par la lettre θ la fonction inconnue et nous écrirons l'équation considérée

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \partial \rho_1} + a\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + c\theta = 0, \tag{20}$$

a, b, c étant des fonctions de ρ et de ρ_1. Les lettres x, y, z, t, ... seront réservées pour désigner des solutions particulières de l'équation (20). Rappe-

lons d'abord comment les équations linéaires de la forme (20) se rattachent à la théorie des systêmes conjugués. Etant données dans un plan deux familles de courbes quelconques C, C_1 représentées en coordonnées homogènes (x, y, t) par les deux équations

$$f(x, y, t) = \rho, \quad f_1(x, y, t) = \rho_1, \tag{21}$$

imaginons les coordonnées homogènes x, y, t d'un point exprimées en fonction des deux paramètres ρ, ρ_1 qui conviennent aux deux courbes passant par ce point

$$x = \Phi(\rho, \rho_1), \quad y = \psi(\rho, \rho_1), \quad t = \chi(\rho, \rho_1). \tag{22}$$

Ces trois fonctions x, y, t sont des intégrales particulières d'une même équation de la forme (20), dont on obtiendrait les coefficients a, b, c en résolvant les trois équations linéaires

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial x}{\partial\rho} + b\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + cx = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial y}{\partial\rho} + b\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + cy = 0,$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial t}{\partial\rho} + b\frac{\partial t}{\partial\rho_1} + ct = 0.$$

Ce systême admet toujours une solution unique, car, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}, & \frac{\partial x}{\partial\rho_1}, & x \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}, & \frac{\partial y}{\partial\rho_1}, & y \\ \frac{\partial t}{\partial\rho}, & \frac{\partial t}{\partial\rho_1}, & t \end{vmatrix}$$

était nul, x, y, z seraient trois intégrales particulières d'une équation de la forme

$$A\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + B\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + C\theta = 0.$$

L'intégrale générale d'une équation de cette espèce est de la forme

$$\theta = \theta_0 F(\sigma_0),$$

θ_0 et σ_0 désignant des fonctions déterminées, et F une fonction arbitraire. Les rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ ne dépendraient donc que de σ_0 et le point de coordonnées (x, y, t) resterait sur une courbe déterminée, quand on ferait varier ρ et ρ_1 de toutes les manières possibles, contrairement à l'hypothèse.

Pour passer du cas des coordonnées homogènes au cas des coordonnés cartésiennes, nous n'aurons qu'à supposer que l'on a pris $t = 1$, ce qui exige que l'on ait $c = 0$, et l'équation (20) prend la forme plus simple

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0.$$

Cela posé, l'intégration de l'équation (20), correspondante à un système de courbes déterminé C, C_1, donne la solution du problème de géométrie suivant: *Trouver toutes les surfaces sur lesquelles les courbes C, C_1, projetées verticalement, découpent un réseau conjugué.*

Soit, en effet, $z = \theta(\rho, \rho_1)$ une solution de l'équation (20), linéairement distincte des solutions x, y, t. On sait que, sur la surface (Σ) représentée par les équations

$$x = \phi(\rho, \rho_1),\ y = \psi(\rho, \rho_1),\ t = \chi(\rho, \rho_1),\ z = \theta(\rho, \rho_1),$$

les courbes (ρ, ρ_1) forment un réseau conjugué, et ces courbes se projettent sur le plan des xy suivant les courbes données C et C_1. On peut aussi retrouver ce résultat de la manière suivante. Supposons qu'on ait pris des coordonnées cartésiennes

$$x = \phi(\rho, \rho_1),\ y = \psi(\rho, \rho_1),\ t = 1,$$

de sorte que l'équation (20) n'ait pas de terme en z; faisons un changement de variables en prenant x et y pour nouvelles variables indépendantes. L'équation (20) se change en une équation linéaire, qui doit admettre les intégrales particulières

$$\theta = 1,\ \theta = x,\ \theta = y;$$

elle est donc de la forme

$$Ar + 2Bs + Ct = 0, \tag{23}$$

A, B, C étant des fonctions de x et de y, et r, s, t ayant les significations habituelles

$$r = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y},\ t = \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}.$$

Les caractéristiques de cette équation, qui satisfont à l'équation différentielle

$$Ady^2 - 2Bdx\,dy + Cdx^2 = 0, \tag{24}$$

sont précisément les courbes C, C_1. Or l'équation (23) exprime que les tan-

gentes à ces caractéristiques sont conjuguées harmoniques par rapport aux projections des tangentes asymptotiques de la surface (Σ) qui a pour équation

$$z = F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant une intégrale de cette équation. Toute intégrale de l'équation (23) fournit donc une surface (Σ) sur laquelle les courbes C, C_1, projetées verticalement, découpent un réseau conjugué.

Inversement, toute équation de la forme (23) peut se ramener à une équation de la forme (20) pourvu qu'on ait déterminé les caractéristiques. Mais il est à remarquer qu'une équation de la forme (20) correspond à une infinité d'équations de la forme (23), que l'on obtient en partant de trois intégrales particulières quelconques.

[11]. Nous rappellerons encore l'interprétation géométrique que Mr. Darboux a donnée de la transformation de Laplace. Les tangentes aux courbes C_1 en tous les points d'une même courbe C enveloppent une nouvelle courbe D que l'on peut définir comme il suit. Par chaque point (x, y, t) il passe une courbe C_1, et un point quelconque de la tangente à cette courbe a pour coordonnées homogènes des expressions de la forme

$$X = \lambda x + \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad Y = \lambda y + \frac{\partial y}{\partial \rho}, \quad T = \lambda t + \frac{\partial t}{\partial \rho},$$

λ étant une arbitraire dont la variation donnerait tous les points de cette tangente. Quand on se déplace sur une courbe C, ρ_1 varie seul et, pour avoir la courbe D, il faut exprimer que le point de coordonnées X, Y, T décrit une courbe tangente à la droite précédente lorsque ρ_1 varie seul, ou que le point $X + \frac{\partial X}{\partial \rho_1} \partial \rho_1$, $Y + \frac{\partial Y}{\partial \rho_1} d\rho_1$, $T + \frac{\partial T}{\partial \rho_1} d\rho_1$ est encore situé sur cette droite. En remplaçant X, Y, T par leurs valeurs, cette condition s'exprime en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} + \lambda \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} x, & \frac{\partial^2 y}{\partial \rho \partial \rho_1} + \ldots, & \frac{\partial^2 t}{\partial \rho \partial \rho_1} + \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial t}{\partial \rho} \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0.$$

On doit donc avoir entre les éléments d'une même colonne une relation de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1} + \lambda\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}x + \mu\frac{\partial x}{\partial\rho} + \nu x = 0,$$

et cette relation devant être vérifiée aussi quand on y remplace x par y et par t doit être identique à l'équation (20); ce qui exige que l'on ait

$$\lambda = b,\ \mu = a,\ \ \nu + \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} = c.$$

Le point cherché a donc pour coordonnées homogènes

$$X = \frac{\partial x}{\partial\rho} + bx,\ Y = \frac{\partial y}{\partial\rho} + by,\ T = \frac{\partial t}{\partial\rho} + bt;$$

lorsque le point (x, y, t) décrit une courbe C, le point X, Y, T décrit en général une autre courbe D; de même, lorsque le point (x, y, t) décrit une courbe C_1, le point (X, Y, T) décrit une autre courbe D_1, et les courbes C_1 et D_1 forment sur le plan un nouveau réseau de courbes, sauf dans des cas particuliers que nous examinerons tout-à-l'heure.

Les fonctions X, Y, T de ρ et de ρ_1 satisfont à une nouvelle équation de même forme que l'équation (20), dont on peut calculer les coefficients, sans connaître ces fonctions elles-mêmes, ce qui constitue précisément la transformation de Laplace. Posons en effet

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\theta,\ k = \frac{\partial b}{\partial\rho_1} + ab - c;$$

l'équation (20) peut s'écrire

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + a\theta_1 - k\theta = 0$$

et l'équation en θ_1 s'obtient en éliminant θ entre les deux équations précédentes, pourvu que k ne soit pas nul, ce qui conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho} + \left(b - \frac{\partial\log k}{\partial\rho}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + \left(c + \frac{\partial a}{\partial\rho} - \frac{\partial b}{\partial\rho_1} - a\frac{\partial\log k}{\partial\rho}\right)\theta_1 = 0, \quad (25)$$

qui est vérifiée par les trois fonctions X, Y, T. En échangeant le rôle des courbes C et C_1 et en opérant sur la nouvelle équation (25) comme sur la première, et ainsi de suite, on obtient, en général, une suite illimitée dans les deux sens d'équations linéaires, et dans le plan une suite illimitée de réseaux de courbes planes. Lorsque la suite de Laplace se termine dans un sens, nous

allons chercher à quelle propriété géométrique cela correspond pour le réseau de la dernière équation de la suite.

Remarquons d'abord que lorsque l'invariant k est nul, l'équation en θ_1 se réduit à une équation du premier ordre

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + a\theta_1 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta_1 = Re^{-\int a d\rho_1},$$

R étant une fonction de ρ seulement. Les coordonnées cartésiennes $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$ ne dépendent donc que de ρ et, par conséquent, *les tangentes aux différentes courbes C_1 en tous les points d'une courbe C concourent en un même point O.* Lorsque la courbe C varie ce point O décrit en général une autre courbe Γ, de sorte que le réseau D, D_1 se réduit à une courbe unique Γ.

Réciproquement, si les tangentes aux courbes C_1 en tous les points d'une courbe C sont concourantes, l'invariant k est nul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut en effet que l'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial\rho} + bx = R\left(\frac{\partial t}{\partial\rho} + bt\right), \quad \frac{\partial y}{\partial\rho} + by = R'\left(\frac{\partial t}{\partial\rho} + bt\right),$$

R et R' étant des fonctions de ρ seulement. On déduit de là les égalités

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1} + b\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \frac{\partial b}{\partial\rho_1}x}{\frac{\partial x}{\partial\rho} + bx} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\partial\rho_1} + b\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + \frac{\partial b}{\partial\rho_1}y}{\frac{\partial y}{\partial\rho} + by} = \frac{\frac{\partial^2 t}{\partial\rho\partial\rho_1} + b\frac{\partial t}{\partial\rho_1} + \frac{\partial b}{\partial\rho_1}t}{\frac{\partial t}{\partial\rho} + bt},$$

qui montrent que x, y, t sont trois intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{\partial b}{\partial\rho_1}\theta + \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\theta\right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\theta\right) + \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\theta\right) = 0,$$

pour laquelle l'invariant k est nul, et cette équation, admettant les intégrales x, y, t, est forcément identique à l'équation (20).

[12]. Il peut arriver d'une autre façon que la construction précédente, appliquée à un réseau (C, C_1), conduise à une courbe unique et non pas à un

réseau. Supposons que les tangentes aux courbes C_1 menées par les différents points d'une même courbe C enveloppent une véritable courbe D; pour que le réseau (D, D_1) se réduise à la courbe D, il faut que cette courbe soit la même, quelle que soit la courbe C dont au part. S'il en est ainsi, toutes les tangentes aux différentes courbes C_1 sont aussi tangentes à la courbe D, ce qui ne peut avoir lieu que si ces courbes C_1 se réduisent à des lignes droites. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Lorsque cette circonstance se présente, on peut encore appliquer à l'équation (20) la transformation de Laplace, pourvu que les droites C_1 ne passent pas par un point fixe, cas qui rentre dans le précédent. Mais la première transformée de Laplace a un de ses invariants nuls. En effet, cette équation

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\rho\partial\rho_1} + a_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho} + b_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + c_1\theta_1 = 0$$

admettra trois intégrales X, Y, T liées par une relation homogène et non linéaire

$$F\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) = 0.$$

En posant

$$\theta_1 = Tu, \quad \frac{X}{T} = u_1, \quad \frac{Y}{T} = u_2,$$

on est conduit à une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} + a_2\frac{\partial u}{\partial\rho} + b_2\frac{\partial u}{\partial\rho_1} = 0, \tag{26}$$

admettant deux intégrales u_1, u_2, liées par la relation non linéaire

$$u_2 = f(u_1).$$

En remplaçant u_2 par $f(u_1)$ dans l'équation précédente, on est conduit à l'équation de condition

$$f''(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\rho_1} = 0;$$

on ne peut avoir $f''(u_1) = 0$, puisque u_2 n'est pas une fonction linéaire de u_1, et il faut, par conséquent, que u_1 ne dépende que d'une des variables ρ ou ρ_1. Si on a par exemple $\frac{\partial u_1}{\partial\rho_1} = 0$, il faudra que l'on ait $a_2 = 0$; l'équation (26) aura donc un invariant nul.

Ainsi, en partant d'un réseau de courbes planes (C, C_1) et appliquant la construction précédente, si on ne rencontre pas de réseau se réduisant à une courbe unique, la suite de Laplace relative à l'équation (20) correspondante est illimitée, et inversement, *pour que la suite de Laplace soit limitée, il faut et il suffit qu'en partant du réseau* (C, C_1) *on finisse par arriver, non à un réseau proprement dit, mais à une courbe ou à un point.*

Cela peut arriver de deux façons distinctes. Si on trouve un réseau (Γ, Γ_1) tel que les tangentes aux différentes courbes Γ_1 en tous les points d'une même courbe Γ passent par un point fixe, un des invariants relatifs à l'équation linéaire correspondante est nul. Si on arrive à un réseau (Γ, Γ_1) tel que les courbes Γ_1 soient des lignes droites (ne passant pas par un point fixe), on peut encore appliquer une fois la transformation de Laplace, mais la nouvelle équation a un invariant nul.

Ce dernier cas doit être considéré comme plus spécial que le premier. Considérons, en effet, une équation de la forme (20) pour laquelle l'invariant $k = \frac{\partial b}{\partial \rho_1} + ab - c$ est nul ; l'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$\theta = \alpha \left\{ F(\rho_1) + \int \beta \Phi(\rho)\, d\rho \right\},$$

α et β étant des fonctions déterminées de ρ et de ρ_1, $F(\rho_1)$ et $\Phi(\rho)$ des fonctions arbitraires. Prenons trois intégrales particulières x, y, t, obtenues en particularisant les fonctions F et Φ,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \left\{ f(\rho_1) + \int \beta \phi(\rho)\, d\rho \right\}, \\ y &= \alpha \left\{ f_1(\rho_1) + \int \beta \phi_1(\rho)\, d\rho \right\}, \\ t &= \alpha \left\{ f_2(\rho_1) + \int \beta \phi_2(\rho)\, d\rho \right\}; \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

si les trois fonctions ϕ, ϕ_1, ϕ_2 sont nulles, le point de coordonnées (x, y, t) décrit une courbe, puisque les rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ ne dépendent que de ρ_1. Si ces trois fonctions ϕ, ϕ_1, ϕ_2 ne sont pas nulles simultanément, les formules définissent sur le plan un réseau de courbes C, C_1, et il est facile de vérifier que les tangentes menées aux courbes $C_1(\rho_1 = c^{te})$ en tous les points d'une même courbe $C(\rho = c^{te})$

vont passer par un point fixe. Les coordonnées homogènes d'un point de la tangente à la courbe C_1 menée par le point (x, y, t) peuvent en effet être définies par les formules

$$X = \frac{\partial x}{\partial \rho} + \lambda x, \quad Y = \frac{\partial y}{\partial \rho} + \lambda y, \quad T = \frac{\partial t}{\partial \rho} + \lambda t,$$

λ désignant une arbitraire; pour la valeur $\lambda = -\frac{\partial \log \alpha}{\partial \rho}$, on trouve

$$X = \alpha\beta\phi(\rho), \quad Y = \alpha\beta\phi_1(\rho), \quad T = \alpha\beta\phi_2(\rho).$$

Les rapports $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$ ne dépendent que de ρ, ce qui démontre la proposition énoncée.

Les remarques qui précèdent ont été le point de départ des recherches qui m'ont conduit à la proposition générale démontrée dans la première partie de ce travail. Il est aisé de voir qu'elles sont la traduction géométrique de cette proposition générale, dans le cas particulier où $n = 3$. Si, en effet, une équation de la forme (20) admet trois intégrales particulières x, y, t, linéairement distinctes, liées par une relation de la forme

$$Ax + By + Ct = 0,$$

où les coefficients ne dépendent que de ρ_1, par exemple, lorsque ρ varie seul, le point (x, y, t) décrit une ligne droite. Les courbes C_1 du réseau correspondant sont donc des lignes droites. Le second théorème général démontré dans la première partie peut de même s'interpréter comme il suit: S'il existe entre trois intégrales linéairement distinctes x, y, t de l'équation (20) et la fonction $e^{-\int b d\rho}$ une relation linéaire et homogène dont les coefficients ne dépendent que de ρ_1, une des familles de l'un des réseaux de courbes que l'on déduit du réseau (C, C_1) par la construction indiquée plus haut se compose de lignes droites.

[13]. On peut transporter aux systèmes conjugués tracés sur une surface (Σ) tout ce qui vient d'être dit sur les réseaux de courbes planes. Considérons sur cette surface deux familles de courbes (C) et (D) formant un système conjugué, et soient

$$x = f(\rho, \rho_1), \quad y = \phi(\rho, \rho_1), \quad z = \pi(\rho, \rho_1), \quad t = \chi(\rho, \rho_1)$$

les coordonnées homogènes d'un point de cette surface exprimées au moyen des

paramètres ρ, ρ_1 des deux familles de courbes (C) et (D); les quatre fonctions x, y, z, t vérifient, comme on sait, une équation unique de la forme (20).

De la surface (Σ), on peut déduire, par l'application répétée d'une construction géométrique uniforme, toute une suite de surfaces, en général illimitée dans les deux sens,

$$\ldots\ldots (\Sigma_{-2}),\ (\Sigma_{-1}),\ (\Sigma),\ (\Sigma_1),\ (\Sigma_2)\ldots\ldots$$

sur chacune desquelles on connaît un système conjugué.* Cette construction consiste à prendre la seconde surface focale de la congruence des tangentes aux courbes (C_i) ou (D_i). Les équations linéaires correspondantes à chacun de ces systêmes se déduisent de l'équation linéaire correspondante au systême conjugué tracé sur (Σ) au moyen de l'application répétée de la méthode de Laplace.

Cela posé, on démontre comme dans le cas des courbes planes les propriétés suivantes. Pour que la suite de Laplace relative à l'équation (20) se termine dans un sens, il faut et il suffit qu'en partant de la surface (Σ) et appliquant à cette surface la construction géométrique qui conduit à une surface contigué, et ainsi de suite un nombre suffisant de fois, on arrive, non à une surface, mais à une courbe.

Cela peut encore arriver de deux façons différentes. Supposons qu'au bout de i opérations on trouve une surface (Σ_i) sur laquelle on connaît deux familles de courbes (C_i) et (D_i) formant un systême conjugué. Pour continuer l'opération il faut prendre la congruence des droites tangentes aux courbes C_i ou aux courbes D_i et chercher la seconde surface focale de cette congruence. Une de ces congruences conduira à une surface déjà obtenue, celle qui précède (Σ_i) dans la série; la seconde congruence conduira en général à une surface nouvelle (Σ_{i+1}). Supposons, pour fixer les idées, que l'on obtienne (Σ_{i+1}) en prenant la seconde surface focale de la congruence formée par les tangentes aux courbes (D_i). Cette surface se réduira à une courbe ou à un point dans les deux cas suivants et dans ces deux cas seulement:

1°. Si les courbes C_i sont les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface (Σ_i) et ayant leurs sommets distribués sur une certaine courbe Γ, d'ailleurs quelconque; dans ce cas, l'équation linéaire (E_i) correspondante a un de ses invariants nuls (ou le démontre comme au n° 11).

---

* Darboux, "Théorie des Surfaces," t. II, p. 16 et suivantes.

2°. Si la surface (Σ_i) est une surface développable (Δ), dont les courbes (D_i) soient les génératrices, les tangentes à ces courbes ne forment plus une congruence et l'application de la construction géométrique conduirait à l'arête de rebroussement de la surface (Δ). On peut encore appliquer une fois à l'équation correspondante (E_i) la transformation de Laplace, à moins que la développable (Δ) ne se réduise à un cône (cas qui rentre dans le précédent), mais la nouvelle équation a un invariant nul.

On démontrera comme plus haut que ce dernier cas est beaucoup plus spécial que le premier.

[14]. La proposition générale démontrée dans la première partie trouve encore ici une confirmation géométrique. D'après ce théorème, si l'équation (20) admet quatre intégrales linéairement distinctes x, y, z, t, liées par une relation de la forme

$$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

où A, B, C, D ne dépendent que d'une seule des variables ρ, ρ_1, de ρ_1 par exemple, la suite de Laplace se termine dans un sens après deux transformations au plus. Or, sur la surface (Σ), décrite par le point de coordonnées x, y, z, t, les courbes $\rho_1 = C^{te}$ et $\rho = C^{te}$ forment un systême conjugué. D'après la relation précédente, les courbes $\rho_1 = C^{te}$ sont évidemment des courbes planes, de sorte que la proposition peut s'énoncer ainsi: *Etant donnée sur une surface* (Σ) *deux familles de courbes, formant un systême conjugué, si l'une de ces familles de courbes se compose de courbes planes, la suite de Laplace relative à l'équation linéaire correspondante se termine dans un sens, après deux transformations au plus.*

La vérification géométrique est immédiate. Si les courbes (C) par exemple sont des courbes planes, les tangentes à ces courbes (C) forment une congruence dont la surface (Σ) est une des nappes de la surface focale. La seconde nappe est la surface développable (Δ) enveloppée par les plans des courbes (C). Donc, d'après ce qui précède, il suffira de deux transformations de Laplace successives appliquées à l'équation (20) pour être conduit à une équation qui aura un invariant nul. On voit, en même temps, quels sont les cas particuliers où il faudra moins de deux transformations pour arriver à une équation ayant un invariant nul. Si les plans des courbes (C) passent par un point fixe O, ils enveloppent un cône ayant son sommet en O; après une première transformation, on a sur ce cône un systême conjugué, formé de courbes (C') et des génératrices de ce cône.

L'équation linéaire correspondante a donc un invariant nul (n° 13). Enfin, si les plans des courbes (C) passent par une droite fixe OO', l'équation linéaire (20) a elle-même un invariant nul; on sait en effet que les courbes (D) sont les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface (Σ), qui ont leurs sommets aux différents points de OO'.

On démontrera de la même façon la proposition suivante, que je ne fais qu'énoncer: Etant données quatre intégrales linéairement distinctes x, y, z, t de l'équation (20), liées par la relation

$$Ax + By + Cz + Dt = e^{-\int b d\rho},$$

où A, B, C, D ne dépendent que de la variable ρ_1, le point x, y, z, t décrit une surface (Σ) sur laquelle les courbes $\rho = C^{te}$ et $\rho_1 = C^{te}$ forment un système conjugué. Les tangentes aux courbes (C) de l'une des familles de ce système forment une congruence; soit (Σ_1) la seconde nappe de la surface focale de cette congruence. *Au système conjugué tracé sur* (Σ) *correspond sur* (Σ_1) *un système conjugué dont l'une des familles se compose de courbes planes.*

III.

[15]. Nous allons appliquer ces considérations générales à quelques exemples.

Considérons sur la sphère de rayon 1 un système conjugué formé d'une famille de cercles (C) et de leurs trajectoires orthogonales (D). Soient c, c', c'' les coordonnées rectangulaires d'un point de cette sphère

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \tag{28}$$

exprimées au moyen des deux variables indépendantes ρ, ρ_1 qui définissent ce système conjugué; c, c', c'' sont trois intégrales particulières d'une équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0. \tag{29}$$

La congruence des tangentes aux courbes (D) a pour surfaces focales la sphère elle-même, et une courbe (Γ) qui est le lieu des pôles des plans des cercles (C). L'équation (29) a donc un invariant nul; la suite de Laplace se termine d'un côté à l'équation elle-même. De l'autre côté, la suite de Laplace se terminera après deux transformations au plus, puisque la congruence des tangentes aux

courbes (C) a pour seconde surface focale une développable. On obtiendra donc pour l'intégrale générale de l'équation (29) une expression où les fonctions arbitraires ne figurent sous aucun signe de quadrature. Cette expression est de rang *un* par rapport à l'une des variables et de rang *trois* au plus par rapport à l'autre variable. Ce rang est égal à *trois* si les cercles (C) sont quelconques; il est égal à *deux*, si les cercles C sont orthogonaux à un cercle fixe; enfin la solution est de rang *un* par rapport aux deux variables si les cercles (C) passent par deux points fixes. Dans ce dernier cas, les trajectoires orthogonales (D) sont également des cercles passant par deux points fixes.

L'intégration de l'équation (29) permet de déterminer toutes les surfaces, qui ont un systême de lignes de courbure planes admettant les cercles (C) pour image sphérique.* Ces surfaces s'obtiennent en prenant l'enveloppe du plan

$$cX + c'Y + c''Z + \theta = 0,$$

θ désignant l'intégrale générale de l'équation (29).

[16]. Faisons la projection stéréographique des cercles (C) de la sphère et de leurs trajectoires orthogonales (D); nous obtenons sur le plan un systême de cercles (C') et leurs trajectoires orthogonales (D'). Deux cercles infiniment voisins (C), (C_1) de la sphère se coupent en deux points M, M' de la sphère qui se projettent en deux points m, m' communs aux deux cercles (C') et (C_1'). Lorsque le cercle (C_1) se rapproche indéfiniment du cercle (C), la droite MM' a pour limite la génératrice G suivant laquelle le plan P du cercle (C) touche son enveloppe, et la droite mm' a pour limite la corde de contact du cercle (C') avec son enveloppe. Donc les cordes de contact des cercles (C') avec leur enveloppe sont les perspectives des génératrices de la surface développable Δ à laquelle le plan P reste tangent.

Considérons maintenant sur les cercles infiniment voisins (C) et (C_1) deux points A et A_1 appartenant à une même trajectoire orthogonale (D); soient AT et A_1T_1 les tangentes en ces points aux cercles (C) et (C_1), at et a_1t_1 leurs perspectives, c'est-à-dire les normales aux points a et a_1 à la courbe D'. Les plans passant par le point de vue O' et les tangentes AT et A_1T_1 se coupent suivant une droite $O'L$ qui, à la limite, passe par le point de la génératrice (G) où la tangente AT touche son enveloppe. On sait en effet que les tangentes aux

* Darboux, "Théorie des Surfaces," tome I, p. 241.

cercles (C) aux différents points de (D) engendrent une surface développable dont l'arête de rebroussement est située sur la développable Δ. Le point d'intersection des deux droites at et a_1t_1 a donc pour limite un point de la droite g; et on a la proposition suivante, qu'il est facile d'établir directement: *Etant données sur un plan une famille quelconque de cercles et leurs trajectoires orthogonales, les centres de courbure des trajectoires orthogonales aux différents points d'un même cercle sont situés sur la corde qui joint les deux points de contact de ce cercle avec son enveloppe.*

En raisonnant sur ce système orthogonal formé de courbes planes comme on a raisonné sur le réseau sphérique dont il est la projection, on en conclut que l'équation linéaire correspondante a un invariant nul, et que la suite de Laplace se termine dans l'autre sens après deux transformations au plus. Les deux équations linéaires relatives, l'une au réseau plan, l'autre au réseau sphérique, se ramènent d'ailleurs l'une à l'autre.

La propriété que nous venons de rappeler des systêmes orthogonaux dans le plan, dont une des familles est composée de cercles, n'est pas particulière à ces systêmes. Elle appartient à une infinité d'autres systêmes orthogonaux, dont Mr. Rouquet a fait une étude approfondie dans son excellente Thèse; pour ces systêmes, composés de deux familles de courbes orthogonales (C) et (D), les centres des courbure des courbes (D) aux différents points d'une même courbe (C) sont en ligne droite. Mr. Rouquet a donné le moyen d'obtenir sans aucune intégration le réseau plan le plus général jouissant de cette propriété. A chacun de ces réseaux orthogonaux correspond une équation linéaire intégrable par la méthode de Laplace. En effet, la transformation géométrique définie plus haut (n° 11) remplace le réseau (C, D) par un nouveau réseau dont une famille se compose de lignes droites et dont l'autre famille est formée par les développées des courbes (D). La suite de Laplace relative à cette équation se termine donc après deux transformations au plus. Il résulte d'une propriété générale, dont je vais rappeler succinctement la démonstration, que la suite de Laplace se termine aussi dans l'autre sens.

[16]. Soit, d'une manière générale, (C, D) un système orthogonal quelconque dans un plan, et soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point du plan exprimées en fonction des variables ρ, ρ_1 qui définissent ce système

$$x = f(\rho, \rho_1), \quad y = \Phi(\rho, \rho_1); \tag{30}$$

x et y satisfont à une équation linéaire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0. \tag{31}$$

La propriété dont il s'agit est celle-ci : *Si la suite de Laplace relative à l'équation* (31) *se termine dans un sens, elle se termine aussi dans l'autre sens au bout d'un nombre fini d'opérations.*

Cela tient, au fond, à ce que l'intégration de l'équation (31) se ramène à l'intégration d'une équation à invariants égaux. Si on prend x et y pour variables indépendantes, l'équation (31) se change en une nouvelle équation linéaire qui, devant admettre les solutions $\theta = 1$, $\theta = x$, $\theta = y$, est de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0;$$

les caractéristiques de cette équation, qui sont définies par l'équation

$$Ady^2 - 2B\,dx\,dy + Cdy^2 = 0,$$

forment par hypothèse un réseau orthogonal. Il faut donc que l'on ait $A + C = 0$, et l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0. \tag{32}$$

En prenant encore deux nouvelles variables $\alpha = x + y$, $\beta = i(x - y)$, l'équation (32) devient

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} = \lambda(\alpha, \beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}, \text{ où } \lambda = \frac{1-B}{1+B}; \tag{33}$$

si on connaît les expressions (30) de x et de y en fonction de ρ et de ρ_1, il revient au même d'intégrer l'une quelconque des trois équations (31), (32) et (33). L'équation (33) peut être remplacé par le systême

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} = \lambda\frac{\partial q}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial p}{\partial\beta} = \frac{\partial q}{\partial\alpha}, \tag{34}$$

où on a posé $p = \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}$, $q = \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}$.

Pour revenir aux variables primitives ρ et ρ_1, remarquons que ρ et ρ_1 satisfait respectivement aux deux équations

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}(B-\sqrt{B^2-1})=0,$$
$$\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}(B+\sqrt{B^2-1})=0,$$

qui deviennent, avec les variables α et β,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=\sqrt{\lambda}\,\frac{\partial\rho}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}=-\sqrt{\lambda}\,\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}. \tag{35}$$

Le systême des équations (34) peut s'écrire

$$\frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+\frac{\partial p}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}=\lambda\left(\frac{\partial q}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}+\frac{\partial q}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}\right),$$
$$\frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}+\frac{\partial p}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}=\frac{\partial q}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+\frac{\partial q}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha},$$

remplaçons $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}$ par leurs valeurs (35), il vient en ajoutant et retranchant les deux équations, le systême équivalent

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial\rho}&=\sqrt{\lambda}\,\frac{\partial q}{\partial\rho},\\ \frac{\partial p}{\partial\rho_1}&=-\sqrt{\lambda}\,\frac{\partial q}{\partial\rho_1}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Si on a intégré le systême (36), l'intégrale générale de l'équation (31) s'obtiendra par une quadrature

$$\theta=\int p\,d\alpha+q\,d\beta$$

ou, en remplaçant $d\alpha$ et $d\beta$ par leurs valeurs,

$$\theta=\int\left\{(p+iq)\frac{\partial f}{\partial\rho}+(p-iq)\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right\}d\rho$$
$$+\left\{(p+iq)\frac{\partial f}{\partial\rho_1}+(p-iq)\frac{\partial\phi}{\partial\rho_1}\right\}d\rho_1. \tag{37}$$

Inversement, si on connaît θ, on en déduira p et q au moyen des deux équations linéaires

$$\left.\begin{aligned}(p+iq)\frac{\partial f}{\partial \rho}+(p-iq)\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}&=\frac{\partial \theta}{\partial \rho},\\(p+iq)\frac{\partial f}{\partial \rho_1}+(p-iq)\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1}&=\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

D'un autre côté, l'élimination de p entre les deux équations (36) conduit à une équation *à invariants égaux*

$$2\sqrt{\lambda}\frac{\partial^2 q}{\partial\rho\partial\rho_1}+\frac{\partial\sqrt{\lambda}}{\partial\rho_1}\frac{\partial q}{\partial\rho}+\frac{\partial\sqrt{\lambda}}{\partial\rho}\frac{\partial q}{\partial\rho_1}=0.\tag{39}$$

La démonstration de la propriété énoncée est maintenant bien facile. Si la suite de Laplace relative à l'équation (31) se termine dans un sens, cette équation admet pour intégrale une expression de la forme

$$\theta=AR+A_1R'+\ldots\ldots+A_nR^{(n)},$$

A, A_1, ... A_n étant des fonctions déterminées de ρ et de ρ_1, R une fonction arbitraire de l'une des variables, de ρ par exemple, et R' .... $R^{(n)}$ ses dérivées. Au moyen des formules (38) qui donnent p et q, on en conclut que l'équation (39) admet pour intégrale une expression de même forme, et, comme cette équation est à invariants égaux, la suite de Laplace doit se terminer dans les deux sens. L'intégrale générale de l'équation (39) est donc de la forme

$$\begin{aligned}q=BF(\rho)+B_1F'(\rho)+\ldots\ldots+B_mF^{(m)}_{(\rho)}\\+C\Phi(\rho_1)+C_1\Phi'(\rho_1)+\ldots\ldots+C_m\Phi^{(m)}_{(\rho_1)},\end{aligned}$$

F et Φ étant des fonctions arbitraires. La valeur de p qui est donnée par la formule

$$p=\int\sqrt{\lambda}\frac{\partial q}{\partial\rho}d\rho-\sqrt{\lambda}\frac{\partial q}{\partial\rho_1}d\rho_1,$$

aura, d'après le théorème cité au n° 5, une expression de même forme, sauf à changer de fonction arbitraire. Le même théorème prouve que l'intégrale générale de l'équation (31), qui est donnée par la formule (37), contient explicitement une fonction arbitraire de ρ, et une fonction arbitraire de ρ_1, ainsi que leurs dérivées, sans aucun signe de quadrature.

[17]. Cette proposition peut s'énoncer sous une forme plus générale en apparence. *Etant donnée une équation linéaire*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + c\theta = 0,$$

qui admet quatre intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants, si la suite de Laplace relative à cette équation se termine d'un côté, elle se termine nécessairement des deux côtés.

Supposons que la relation quadratique ait été mise sous la forme

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3\theta_4 = 0;$$

si on pose $\theta = u\theta_4$, cette relation devient

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3 = 0,$$

où

$$u_1 = \frac{\theta_1}{\theta_4},\ u_2 = \frac{\theta_2}{\theta_4},\ u_3 = \frac{\theta_3}{\theta_4},$$

et u_1, u_2, u_3, 1 sont quatre intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} + a'\frac{\partial u}{\partial\rho} + b'\frac{\partial u}{\partial\rho_1} = 0.$$

Si on écrit que u_1, u_2, $u_1^2 + u_2^2$ sont trois intégrales de cette équation, on trouve que u_1 et u_2 doivent satisfaire à la relation

$$\frac{\partial u_1}{\partial\rho}\frac{\partial u_1}{\partial\rho_1} + \frac{\partial u_2}{\partial\rho}\frac{\partial u_2}{\partial\rho_1} = 0,$$

qui exprime que les courbes $\rho = C^{te}$ et $\rho_1 = C^{te}$ forment un réseau orthogonal, quand on considère u_1 et u_2 comme les coordonnées rectangulaires d'un point. On est donc ramené au cas précédent. Par conséquent, si l'on considère sur une surface du second degré non développable un système conjugué quelconque et l'équation linéaire correspondante, la suite de Laplace relative à cette équation ne peut se terminer d'un côté sans se terminer de l'autre côté.

A tout réseau plan orthogonal correspond sur la sphère un système conjugué, obtenu au moyen d'une projection stéréographique, et les équations linéaires, qui sont vérifiées, l'une par les coordonnées rectangulaires x, y d'un point du plan exprimées au moyen des paramètres ρ, ρ_1, qui définissent ce réseau, l'autre par les coordonnées rectangulaires, c, c', c'' d'un point de la sphère, exprimées au

moyen des mêmes variables, s'intégrent en même temps car elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation simple. Soit, en effet,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + a\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0$$

l'équation relative au réseau plan. D'après ce qui précède, elle admet les quatre intégrales x, y, x^2+y^2, 1 et, par suite, $\frac{x^2+y^2+1}{2}$, $\frac{x^2+y^2-1}{2}$ sont aussi des intégrales. Si on pose maintenant $\theta = u\frac{x^2+y^2+1}{2}$, l'équation en u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} + a'\frac{\partial u}{\partial\rho} + b'\frac{\partial u}{\partial\rho_1} = 0$$

admet les intégrales

$$c = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad c' = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad c'' = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1},$$

liées par la relation $c^2+c'^2+c''^2=1$. Or c, c', c'' sont précisément les coordonnées du point de la sphère qui a pour perspective le point (x, y) du plan. L'équation en u est donc l'équation linéaire correspondante au systême orthogonal tracé sur la sphère.

Par exemple, en projetant sur la sphère les réseaux orthogonaux de Mr. Rouquet, on obtiendra deux familles de courbes sphériques orthogonales jouissant de la propriété suivante. Si l'on considère la congruence formée par les tangentes à l'une de ces familles et la seconde nappe (Σ_1) de la surface focale, au systême orthogonal tracé sur la sphère correspond un systême conjugué tracé sur (Σ_1); les courbes d'une des familles de ce systême conjugué sont des courbes planes dont les plans passent par le point fixe de la sphère pris pour point de vue. On le démontre en reprenant les raisonnements du n° 13.

[18]. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface (S) exprimées en fonction des paramètres ρ et ρ_1 des deux systêmes de lignes de courbure, c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, R et R_1 les rayons de courbure principaux. On a, d'après les formules d'Olinde Rodrigues,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \rho} + R\frac{\partial c}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c}{\partial \rho_1} = 0,\\
&\frac{\partial y}{\partial \rho} + R\frac{\partial c'}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c'}{\partial \rho_1} = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial \rho} + R\frac{\partial c''}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c''}{\partial \rho_1} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

l'élimination de x entre les deux premières équations conduit à une équation

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(R\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(R_1\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}\right) = 0 \tag{41}$$

qui est vérifiée par c, c', c''. On voit de même que x, y, z sont trois intégrales de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1}\right); \tag{42}$$

l'équation (41) correspond au systême conjugué formé sur la sphère par les images sphériques des lignes de courbure de la surface (S), tandis que la dernière équation correspond au systême conjugué formé par les lignes de courbure de la surface (S). D'après la façon dont ces équations ont été obtenues, on voit qu'elles s'intégrent en même temps. Si λ est l'intégrale générale de l'équation (42), l'intégrale générale de l'équation (41) sera donnée par la formule

$$\theta = -\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}d\rho + \frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1}d\rho_1\right);$$

de même l'intégrale générale de l'équation (42) se déduit de l'intégrale générale de l'équation (41) par la formule

$$\lambda = -\int\left(R\frac{\partial \theta}{\partial \rho}d\rho + R_1\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}d\rho_1\right).$$

On voit donc que: 1° *la détermination des surfaces qui admettent la même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure qu'une surface donnée* (S) *se ramène à l'intégration de l'équation linéaire qui correspond au réseau conjugué formé par les lignes de courbure de cette surface*; 2° *si la suite de Laplace relative à cette équation se termine d'un côté, elle se termine aussi de l'autre côté.*

[19]. Appliquons ceci au cas où la surface (S) admet un systême de lignes de courbure sphériques; soit

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0, \tag{43}$$

l'équation de la famille de sphères qui contiennent ces lignes de courbure, A, B, C, D, E étant des fonctions d'une seule des variables ρ, ρ_1. L'équation (E), correspondante au systême conjugué formé par les lignes de courbure, admet, comme on sait, les cinq intégrales

$$x,\ y,\ z,\quad x^2+y^2+z^2,\ 1,$$

qui sont liées par la relation (1). Il résulte de la proposition générale démontrée au début que la suite de Laplace relative à l'équation (E) doit se terminer d'un côté après trois transformations au plus. Par suite, *étant donnée une surface* (S) *ayant un systême de lignes de courbure sphériques, la détermination des surfaces qui admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure se ramène à l'intégration d'une équation linéaire pour laquelle la suite de Laplace est terminée dans les deux sens.*

[20]. On arrive à un résultat équivalent au moyen d'un théorème de Mr. Blutel.* Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface (S), exprimés en fonction des paramètres α, β des deux systêmes de lignes de courbure; c, c', c'' satisfont à une équation linéaire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}+a\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+b\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0. \tag{44}$$

Soit, d'autre part,

$$ds^2=A^2d\alpha^2+C^2d\beta^2$$

le carré de l'élément linéaire de la sphère rapportée aux lignes (α,β); on a

$$\Sigma\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)^2=A^2,\ \Sigma\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta}=0,\ \Sigma\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2=C^2.$$

Cela posé, si les lignes de courbure ($\beta=$ const.) sont sphériques, il existe entre c, c', c'' une relation de la forme

$$b(\beta)\,c+b_1(\beta)\,c'+b_2(\beta)\,c''+b_3(\beta)=b_4(\beta)\,C, \tag{45}$$

et réciproquement, si un réseau sphérique orthogonal satisfait à une relation de cette forme, il existe une infinité de surfaces admettant le réseau donné pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure, et pour lesquelles les lignes $\beta=C^{te}$ sont sphériques. Telle est la proposition de Mr. Blutel.

* "Sur les surfaces à lignes de courbure sphériques" (Comptes-rendus; 10 février 1896).

De l'équation (44) on déduit en remplaçant successivement θ par c, c', c'', multipliant par $\frac{\partial c}{\partial \beta}$, $\frac{\partial c'}{\partial \beta}$, $\frac{\partial c''}{\partial \beta}$ et ajoutant,

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} + bC = 0;$$

on en tire

$$C = e^{-\int b d\alpha},$$

et la relation (45) est de la forme à laquelle la seconde proposition générale est applicable, car c, c', c'', 1 sont quatre intégrales. La suite de Laplace relative à l'équation (44) se termine donc dans un sens après trois transformations au plus, et, comme elle correspond à un système orthogonal sur la sphère, la suite de Laplace doit se terminer dans les deux sens. Nous retrouvons le même résultat que par la première méthode.

La relation (45) peut s'interpréter géométriquement comme il suit. Les tangentes aux courbes $\beta = C^{te}$ forment une congruence qui admet pour seconde nappe de la surface focale une surface (Σ_1); le système conjugué de (Σ_1) qui correspond au système conjugué de la sphère se compose de deux familles de courbes dont l'une est formée de courbes planes. Les réseaux orthogonaux que l'on déduit par projection des réseaux plans orthogonaux de Mr. Rouquet satisfont à cette condition. De plus, les plans des courbes planes qui forment une des familles du système conjugué de (Σ_1) passent par un point fixe. Par conséquent, la suite de Laplace relative à l'équation (44) se termine dans un sens après deux transformations seulement.

On trouvera d'autres applications du théorème général dans un article du Bulletin de la Société Mathématique (1896).